FLASH LA FIN4L

✦ Mingea de fotbal este construită pe baza trunchiului de icosaedru (se taie vârfurile icosaedrului, în locul fiecăruia rămânând un pentagon regulat; iar fețele icosaedrului se transformă în hexagoane regulate). Astfel, mingea de fotbal are 12 fețe pentagoane regulate și 20 de fețe hexagoane regulate.

✦ Într-un interviu din această vară, Mugur Mihăescu de la Vacanța Mare declara: „...eu mă duceam la școală nu să arăt ce haine aveam... Eu mă duceam să arăt ce bagaje am în cap. Nu să arăt cu ce parfum m-am mai dat și nici cu cine știe ce walkman, și cu nu știu ce muzică am mai tras eu de pe Napster. M-am dus la școală să învăț..."

✦ La campionatul mondial de fotbal selecția funcționează pe șirul descrescător al puterilor lui 2: participante în grupe 2^5, optimi de finală 2^4, sferturi de finală 2^3, semifinale 2^2, finala 2^1 și campioana 2^0.

✦ Matematică intensă în muzica românească. Taxi vorbesc de „Jumătatea mea", iar Stigma de „Jumătate tu, jumătate eu".

✦ Șapte polițiști merg la o bere. Fiecare bere costă 13 lei. La sfârșit chelnerul vine cu nota de plată: 28 lei. Polițiștii se tot gândesc, parcă ceva nu-i în regulă și îi cer chelnerului să mai calculeze o dată. Acesta, înțelegător, le reface calculul: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$ și cu 7 de 1 dă 28 (puneți unul sub celălalt cei 7 de 13). Hai să facem și înmulțirea, zice chelnerul: $7 \cdot 3 = 21$, punem 2 la zeci și 1 mai departe; $7 \cdot 1 = 7$ și cu 1 dă 8, deci avem iar 28. Polițiștii se tot minunează, așa că, chelnerul face proba și cu împărțire: (28 : 7), astfel: 7 în 8 merge o dată (1), rest 1 sub 8; cobor 2 în fața lui 1; 7 în 21 de 3 ori, adică 28 : 7 = 13. Bine!

✦ Steaua care se învârte în colțul ecranului la *Copiii spun lucruri trăznite* se numește icosaedru stelat și este obținut prin prelungirea muchiilor unui icosaedru regulat. Acest corp stelat are 60 de fețe triunghiuri de aur.

✦ Auzită la o corigență în această vară (pe bune) : Pe ce șade un con? Pe o sferă!

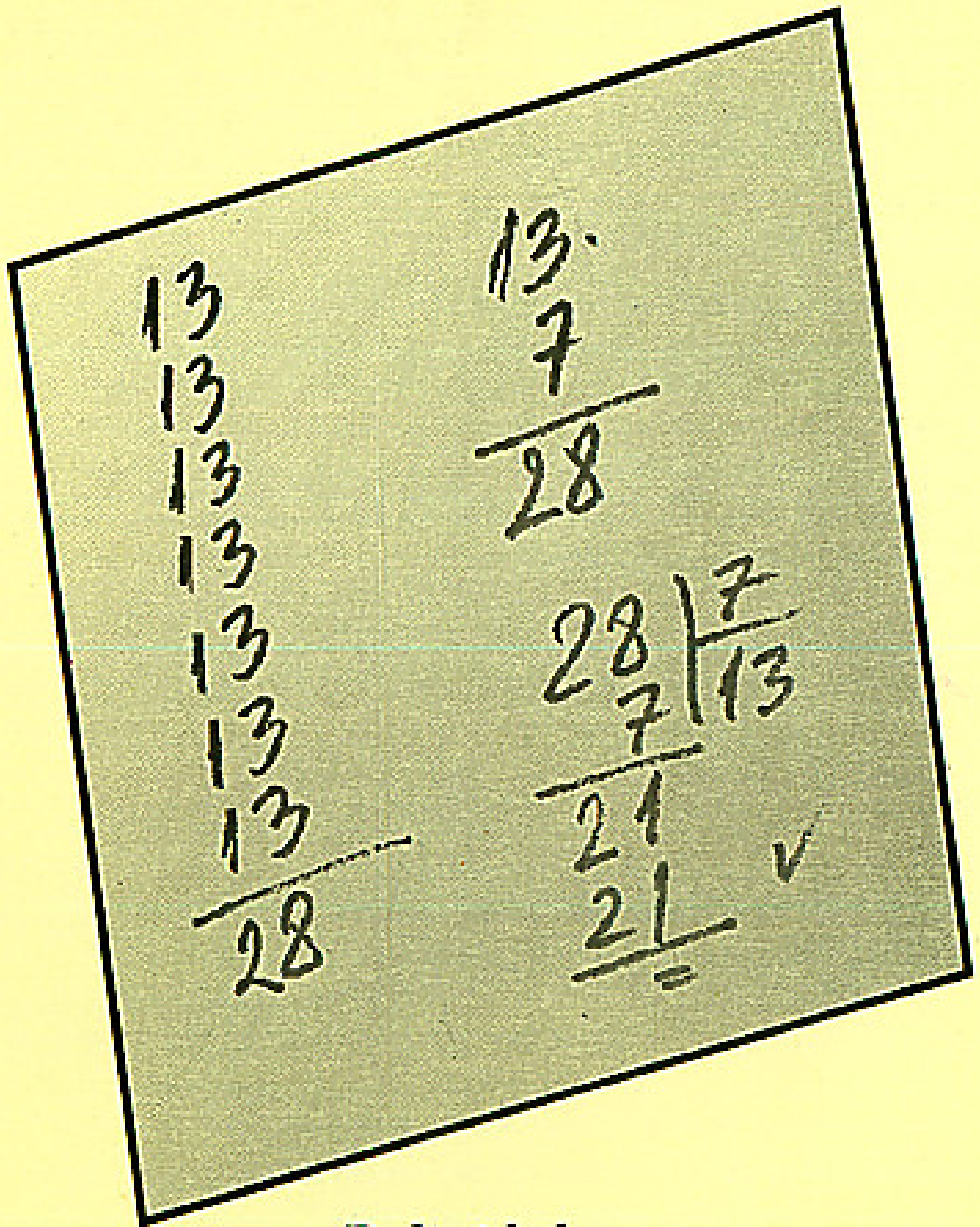
Editura TRIADE 2002
ISBN: 973 – 8313 – 37 – 6

28 29

CAIETE DE MATEMATICĂ

P3NT4GON1A

REDACTORI
MARIANA & TITUS GRIGOROVICI



Deltoidul
101 exerciții și probleme în **N, Z, Q, R**
Linia mijlocie în triunghi

NUMĂRUL 9
SEPTEMBRIE 2002

27 26

CLASA 0 (zero)

În 1973 m-au dus părinții la școală. Aveam șase ani. Toți colegii mei aveau între 6 și 7 ani. Așa se mergea la școală pe vremea aceea. între timp, pe la sfârșitul anilor '70, Tovarășa Suzana Gâdea, Ministru al Învățământului, a luat hotărârea ca nivelul Școlii românești să fie ridicat. Astfel, materiile au devenit tot mai grele, iar lecțiile au început un exod lent dar hotărât spre clasele mai mici. Un ajutor puternic, în acest sens, a venit din partea olimpiadelor, care au devenit tot mai pronunțat un reper în stabilirea nivelului de dificultate a materiei parcurse.

Pe durată, unul dintre rezultatele cele mai palpabile ale acestei politici a fost acela că părinții și-au trimis copii tot mai târziu la școală, ajungându-se la vârste de 7, chiar 8 ani împliniți de mers în clasa I.

Care a fost reacția în timp a Ministerului? La început timid, apoi tot mai hotărât, „programa" de grădiniță" a preluat elementele specifice începutului de școală. Până când situația s-a oficializat prin grupa pregătitoare obligatorie. Astfel, copii au ajuns să meargă la grădiniță cu caiete și penar, pus desigur în ghiozdan, așa cum am mers eu pe vremuri în clasa I. Aș evidenția doar o latură a absurdului acestei situații: educatoarele, instruite să facă o muncă, au ajuns să facă o alta, și anume cea de învățătoare. Iar copiii ajung în clasa I cu diferite nivele de cunoștințe, nu în funcție de nivelul lor de inteligență, ci depinzând de cât de zeloasă a fost educatoarea. Astfel, se ajunge la situații absurde când elevi inteligenți, dar a căror educatoare s-a ținut strict de programă, să fie catalogați în clasa I ca fiind „cu probleme" și trimiși la psihologi pentru a fi reparați, deoarece nu fac față la același nivel ca și colegii lor a căror educatoare pline de zel au depășit în grupa pregătitoare programa alocată.

În aceste condiții, cu tot comicul situației, mi se pare cea mai bună hotărârea luată în această vară, de-a transforma această grupă pregătitoare în clasă de școală. Cum va fi numită această clasă și cum se va face tehnic mutarea, este o altă problemă, probabil foarte distractivă pentru presa avidă de spectacol și senzație.

Și dacă tot am adus vorba despre presă, aceasta ne anunța prin vară, că la concursul de titularizare a profesorilor de matematică, un procentaj foarte mic de profesori au luat concursul. „Vai ce nepregătiți sunt profesorii!" a fost concluzia generală. Nimeni nu s-a interesat însă de dificultatea, și pe alocuri, absurdul subiectelor. Se mai poate pune problema și altfel: dacă avem așa un învățământ performant cum pretindem cu atâta mândrie, cum se explică aceste rezultate slabe? O explicație ar putea fi următoarea: învățământul nostru nu este deloc eficient, în sensul că marea majoritate a elevilor și a studenților nu acumulează nici pe departe toate cunoștințele cu care sunt bombardați de către profesori (un inspector a contabilizat o dată la o clasă de liceu, la toate cele 7 ore dintr-o zi în jur de 150 de itemi noi!). Pentru a mări eficiența ar trebui scăzut nivelul mult prea ridicat la care a fost adus, adaptând din nou materia fiecărei vârste. Dacă în direcția aceasta se îndreaptă intențiile Doamnei Ministru Andronescu, îi țin pumnii și îi urez mult succes.

Titus Grigorovici

PREZENTARE DE CAR7E

PAUL J. NAHIN – „O poveste imaginară. Istoria numărului $\sqrt{-1}$".
Fundația Theta, București, 2000

Marele filozof al iluminismului, francezul Denis Diderot, spunea despre matematicieni că „sunt asemenea celor care privesc în zare de pe vârfurile unor munți ale căror creste sunt pierdute printre nori. Obiectele de pe câmpiile de la poale le dispar din vedere; ei rămân numai cu spectacolul propriilor gânduri, și cu conștiința înălțimii la care s-au ridicat și unde nu oricine îi poate urma și respira". Ei bine, aerul din această carte are aproape presiunea celui de la nivelul mării. Mari porțiuni pot fi citite și înțelese de către un elev din ultimele clase de liceu. Autorul este profesor de inginerie electrică la Universitatea din New Hampshire, SUA și își prezintă lucrarea astfel: *„Eu sunt un inginer electronist, nu un matematician și stilul cărții reflectă această diferență. Mi-am folosit relativa libertate pe care mi-o dă această distanțare față de genul pedagogic uzual – care poate degenera în pedanterie în formele sale cele mai grave – pentru a scrie într-un stil informal și, sper eu, atractiv".* Și într-adevăr, cartea este scrisă deosebit de atractiv – fără a cădea într-o superficialitate comercială de genul „Arborele lumii" – purtând cititorul pe nerăsuflate prin aventura descoperirii numerelor complexe.

Pentru profesorul conștient de complexitatea sarcinii sale ca dascăl, se relevă două aspecte esențiale. În primul rând, autorul Paul Nahin ne evidențiază, cu claritate dezarmantă, dificultățile de secole prin care a trecut lumea matematicienilor pentru a accepta si a înțelege numerele negative: *„Totuși suspiciunea față de numerele negative pare atât de stranie astăzi oamenilor de știință și inginerilor numai pentru că aceștia au uitat frământările prin care au trecut în școala primară. De fapt, oameni inteligenți dar fără pregătire tehnică continuă să trăiască aceste frământări chiar și în anii de maturitate, după cum*

CUPRINS

atestă următorul cuplet, atribuit poetului W. H. Auden (1907 – 1973):

Că minus ori alt minus face plus
O vom lua de bună: asta e!
Motivul nu ar fi prea complicat
Deci nu are rost să discutăm de ce.

Însuşi marele Euler a considerat neliniştea descrisă de Auden suficient de importantă ca să includă o «explicaţie» destul de dubioasă pentru faptul că «minus ori minus e plus» în faimosul său tratat Algebra, *din 1770.* (Parcurgând această carte, nu putem să nu privim cu mare suspiciune procesul de introducere lentă a numerelor negative şi a modulului încă din clasa a V-a. În legătură cu acest subiect aş aminti profesorilor mai în vârstă de marea culegere a lui Grigore Gheba, despre care absolvenţii ultimilor ani nici nu au auzit. În ediţia acesteia din 1975, operaţiile cu numere pozitive şi negative apar la algebră în clasa a VII-a.)

Revenind la istoria numărului $\sqrt{-1}$, profesorii găsesc aici adevăratul drum pe care au mers matematicienii în descoperirea numerelor complexe. Despre introducerea acestora ca perechi ordonate, practicată la noi în ţară de un sfert de secol, şi despre William Rowan Hamilton (1805 – 1865), cel care a avut primul această idee năstruşnică, Paul J. Nahin scrie: *„Acestea sunt definiţii şi, in consecinţă, nu au nevoie de alte explicaţii. Este clar însă că Hamilton era motivat de modul cum funcţionează numerele complexe, preferând notaţia (a, b) pentru că evită folosirea «absurdului»* $\sqrt{-1}$ ". Şi încă o minciună cu care îi fraierim pe elevi în fiecare an: „matematicienii au descoperit numărul *i* rezolvând ecuaţia $x^2 + 1 = 0$." Nimic mai fals: matematica i-a obligat pe matematicieni să recunoască numerele imaginare prin intermediul ecuaţiei cubice $x^3 = 15x + 4$ şi a formulelor lui Cardano (pe care nu le-a descoperit Cardano; acesta a calculat în schimb horoscopul lui Hristos). Povestea trebuie neapărat citită de către orice iubitor al matematicii, fiind mai palpitantă decât multe romane de acţiune.

Nu voi încheia spicuirile din această deosebită carte fără a vă prezenta încă două observaţii interesante din paginile acesteia. *„La vârsta de 25 ani viitorul mare matematician Gottfried Leibnitz (1646 – 1716) avea foarte puţine competenţe în domeniul matematicilor moderne. Cunoştinţele lui directe se limitau la matematica vechilor greci."* (vai de elevii şi studenţii zilelor noastre). Cât despre Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857) *„se spune că marele matematician francez Louis Lagrange (1736 – 1813) i-ar fi spus tatălui lui Cauchy că fiul său va ajunge cândva un mare om de ştiinţă, dar l-a prevenit să nu-i arate băiatului vreo carte de matematică înainte ca acesta să împlinească 17 ani!"*

D-4LE PROFE5OR1LOR - **Algebra de-a V-a sau Cuiul lui Pepelea**

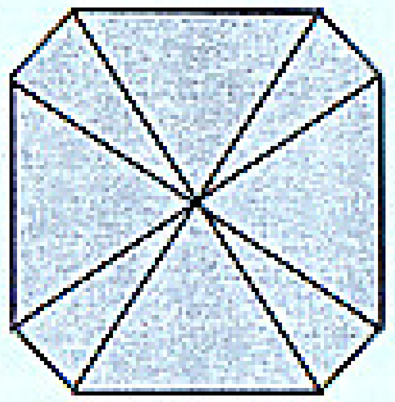
Prin '95 eram convins că geometria reprezintă problema cea mai grea în matematica gimnazială actuală. Astfel mi-am îndreptat toată atenţia în această direcţie, găsind în câţiva ani rezolvări la toate problemele legate de predarea geometriei. Cu cât reuşeam însă să accesibilizez geometria, vedeam tot mai clar dificultăţile întâmpinate de elevi în învăţarea algebrei. Mai ales că, odată cu introducerea manualelor alternative, aceste dificultăţi s-au accentuat dramatic.

Mă refer aici la avalanşa de exerciţii şi lecţii bazate pe gândirea specifică algebrei, exerciţii şi lecţii cu care elevul de clasa a V-a este „îngropat de viu" şi din care marea majoritate a elevilor nu înţeleg nimic. De-abia în clasa a VII-a elevii încep să se maturizeze şi să priceapă câte ceva din această „zestre a olimpiadelor". Într-adevăr, asta este crunta realitate: dacă în urmă cu câteva zeci de ani exerciţiile bazate pe gândirea algebrică apăreau doar în Gazeta Matematică şi la olimpiade, pentru elevii de excepţie, la ora actuală orice elev este bombardat cu această „artilerie grea". „Muniţia" de la olimpiadă este însă atât de puternică încât nici elevii cei mai buni nu-i mai fac faţă. De exemplu, la ultima olimpiadă locală, majoritatea elevilor clasei a V-a nici n-au reuşit să obţină echivalentul notei 5 (notele reale, nu cele transmise mai departe). Culmea este că, de multe ori nici profesorii nu pot rezolva unele subiecte propuse. De pildă, la problema cu trecerea în baza 2 dată la clasa a V-a în Cluj, în 2002 (*Fără a trece numerele a = 1234, b = 567 şi c = 89, în baza 2, să se afle câte cifre vor avea cele trei numere în această bază de numeraţie*), doar doi profesori de la un centru de concurs au ştiut „din prima" rezolvarea (şi aceasta pentru că amândoi erau absolvenţi ai Liceului de Informatică şi erau familiarizaţi cu trecerile în această bază de numeraţie folosită în informatică). Revenind la gândirea algebrică pe care se bazează exerciţiile şi lecţiile din clasele a V-a, iată o listă (incompletă!) a elementelor ce nu sunt deloc în concordanţă cu gândirea elevilor de această vârstă:

1. Exerciţiile de tipul celor cuprinse în acest caiet la „101 exerciţii şi probleme în $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$" sunt mult mai potrivite elevilor de clasele VII – VIII.
2. Demonstrarea criteriilor de divizibilitatea cu 9 şi cu 3 sunt mai potrivite clasei a VIII-a. La fel şi demonstrarea transformării fracţiilor zecimale periodice în fracţii ordinare. În vest, acestea se studiază în clasa a IX-a.
3. Studiul bazelor de numeraţie este din toate punctele de vedere o temă specifică clasei a IX-a. În clasa a V-a, copii nu au cum să înţeleagă aşa ceva. Iar faptul că elevii nu au făcut deloc exerciţiul de la olimpiadă este cea mai bună dovadă în acest sens.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ P3NT4GON1A
Ediția a III-a, 27 octombrie 2001
PROBA INDIVIDUALĂ

PARTEA I



1. O umbrelă de soare are forma unui pătrat cu colțurile tăiate, cu opt spițe, câte una în fiecare colț al octogonului format. Știind că unghiul dintre două spițe ce susțin „un colț al pătratului" are măsura de 18°, deducem că unghiul dintre două spițe ce susțin „o latură a pătratului" are măsura de …………

2. $(1:2+2:3+3:4+4:5):(163:60)=$ …………

Culegere Pentagonia

3. Un trapez are baza mică și înălțimea egale cu 12 cm, iar laturile oblice de 15 respectiv 20 cm. Perimetrul și aria trapezului sunt P = …. și $\mathcal{A}$= …..

4. Dintr-o bucată de stofă de 27 m, un croitor taie în fiecare zi câte 3 m. În a câta zi va tăia ultima dată? …………

Culegere Pentagonia

PARTEA a II-a

5. Fie numărul $n = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$. Demonstrați că $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

G.M. 5 – 6 / 2000 Valer Pop, Șanț, Bistrița-Năsăud

6. O țărancă vine la piață să vândă ouă. Primului client îi vinde o jumătate din total și încă o jumătate de ou; celui de-al doilea client îi vinde o treime din total și încă o treime de ou. Câte ouă a avut la început dacă i-au mai rămas exact 7 ouă?

Culegere Pentagonia

7. Fie triunghiul isoscel ABC (AB = AC) cu $m(\sphericalangle A) < 60°$. Pe dreapta BC luăm punctul E astfel încât $B \in [EC]$ și CE = AC, iar pe dreapta AC punctul F astfel încât $C \in [AF]$ și CF = BE.

a) Demonstrați că ΔAEF este isoscel;
b) Câte triunghiuri isoscele sunt în această figură?
c) Triunghiul AEF poate fi echilateral? Justificați răspunsul dat.

8. În cercul de diametru [BD] se înscrie patrulaterul ABCD cu $AB = 3\sqrt{2}$ cm și $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Fie $AM \perp BD$ și $CN \perp BD$, $M, N \in [BD]$. Calculați diametrul cercului știind că MN = 1 cm.

Culegere Pentagonia

9. Desenați un patrulater concav (neconvex).

a) Transformați acest patrulater într-un triunghi echivalent (de aceeași arie);
b) Transformați patrulaterul inițial într-un trapez echivalent.

Descrieți și justificați în ambele cazuri pașii efectuați.

Caietul Pentagonia Nr.8

Notă: La subiectele din partea I trebuie date doar răspunsurile pe foaia de concurs. La subiectele din partea a II-a trebuie date rezolvările sau demonstrațiile complete. Timp de lucru 90 minute.

PROBA PE ECHIPE

PARTEA I

1. Calculați:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{11}{20}:\left(\frac{15}{16}\cdot\frac{14}{39}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{13}{21}\right):\left(4\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}:\frac{11}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{1}\right)$$

Culegere Pentagonia

2. Se consideră numerele $x = 7n - 11 + 3 \cdot (-1)^{n+1}$ și $y = 7n + 18 - 3 \cdot (-1)^{n}$, unde n este un număr întreg.

a) Arătați că $x - y = -29$, pentru orice număr întreg n.
b) Demonstrați că pentru orice număr întreg n, 14 divide x sau 14 divide y.
c) Determinați numerele întregi n pentru care x divide y.

Examenul de Capacitate, 2001 Varianta 2

3. a) Construiți un triunghi ABC cu laturile AB = 10 cm, BC = 15 cm și CA = 13,5 cm. Construiți cercul înscris în Δ ABC.

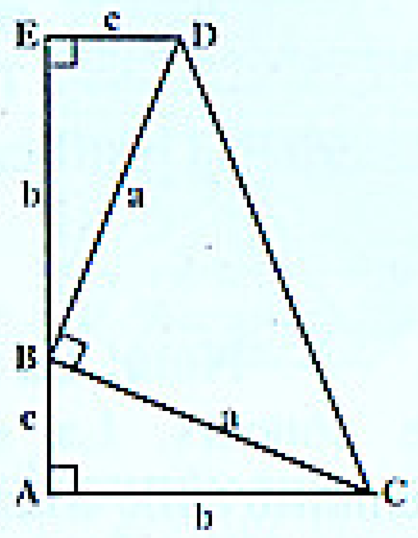
b) În fiecare colț al triunghiului trasați câte un cerc tangent la cele două laturi ale unghiului și la cercul înscris în triunghi. Descrieți și justificați pașii pentru trasarea acestor cercuri.

4. *Într'un triunghiu dreptunghiu BAC ($\sphericalangle A = 90°$) se proiectează piciorul bisectoarei AI în M şi N respectiv pe catetele AB şi AC. Să se calculeze segmentul MN cunoscând lungimile AB = c şi AC = b.*

O.N. Ţino, G.M. Supliment 4 /1944

5. Calculaţi cât mai uşor: $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{10\text{cifre}} + 11$

6. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic compus din două triunghiuri dreptunghice congruente Δ ABC ≡ Δ EDB de catete b şi c şi triunghiul dreptunghic isoscel BDC de catete a. Folosind această figură demonstraţi teorema lui Pitagora.



7. Se organizează un examen cu trei materii astfel: prima materie, cea mai importantă, cu ponderea 5, a doua cu ponderea 3, iar a treia cu ponderea 2. Pentru a promova examenul trebuie obţinută cel puţin nota 7. Un candidat a obţinut la cele trei examene, în ordine, notele 5, 8, respectiv 10. Stabiliţi dacă acest candidat a promovat examenul.

8. Într-o clasă 50% din elevi joacă baschet, 40% joacă fotbal şi 10% practică ambele sporturi. Câţi elevi nu joacă nici baschet nici fotbal?

Culegere Pentagonia

9. Fiind dat un paralelogram, construiţi numai cu ajutorul riglei negradate, mijlocul unei laturi.

Manual Geometrie clasa a VII-a, 1993

Notă: La toate subiectele se vor da rezolvările sau demonstraţiile complete. Fiecare echipă va redacta o singură lucrare. Timp de lucru 90 minute.

Iată şi premianţii acestui concurs:

Proba individuală:

locul 1: Márkus András – Liceul teoretic Báthory
locul 2: Ficuţ Ioana – Şcoala Nr. 21
locul 3: Sârdea Cosmin – Şcoala „Eugen A. Pora"
Manea Avram – Colegiul Naţional „Emil Racoviţă"

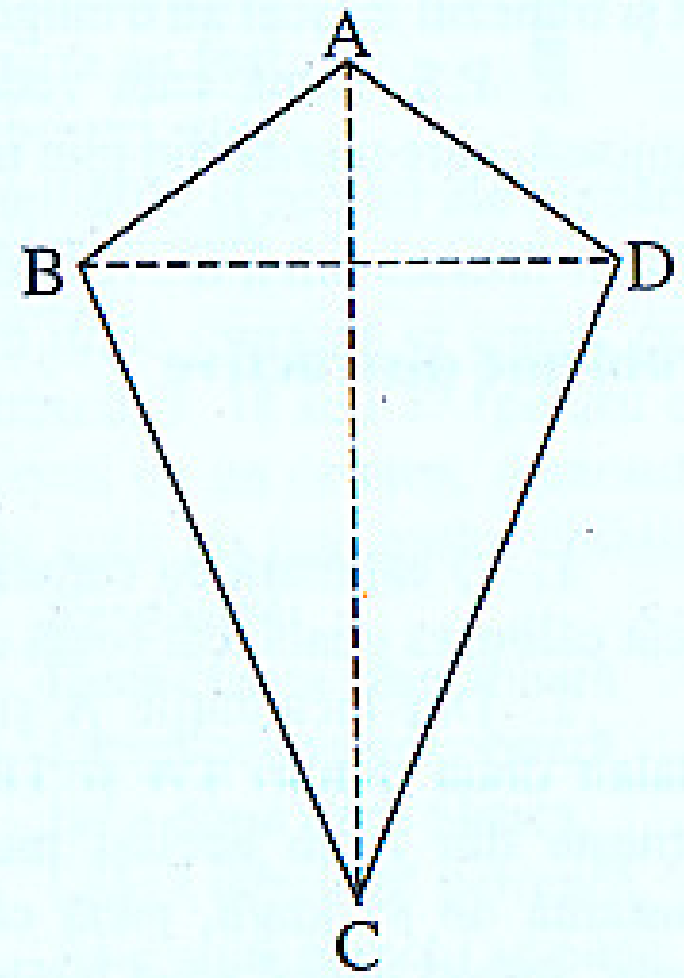
Proba pe echipe:

locul 1: Liceul Báthory echipaj condus de prof. Ágnes Vincze
locul 2 – 3: Şcoala „Ioan Bob", echipaj condus de prof. Maria Măcelaru şi Colegiul Naţional Emil Racoviţă, echipaj condus de prof. Emil Sitaru.

ME7ODICA – DELTOIDUL

Cunoscut şi sub numele de „patrulater zmeu", deltoidul este marele absent din capitolul de patrulatere (predat în clasa a VII-a, deşi locul său natural este în clasa a VI-a după triunghiuri). Cea mai clară definiţie a sa este probabil următoarea:

Definiţie: Deltoidul este patrulaterul cu două perechi de laturi alăturate congruente.



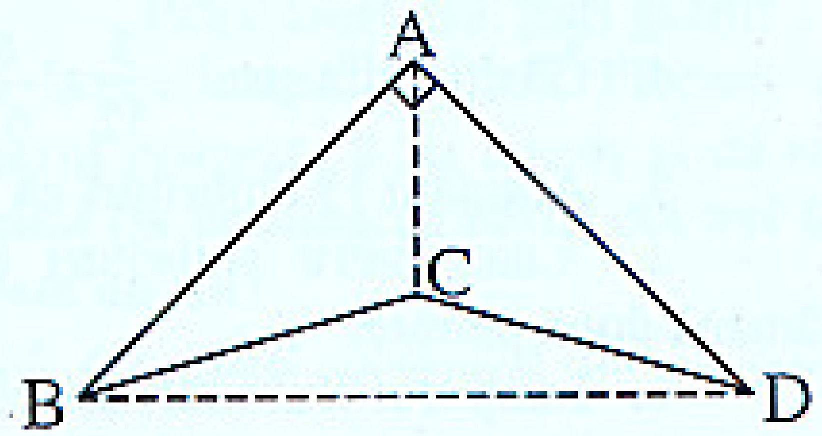
Din această definiţie se pot demonstra celelalte proprietăţi ale sale:

- deltoidul are o pereche de unghiuri opuse congruente;
- diagonalele sale sunt perpendiculare;
- diagonala ce uneşte unghiurile congruente este înjumătăţită

Observăm că deltoidul este compus din două triunghiuri isoscele cu baza comună.

Există următoarele tipuri de deltoide speciale:

- *deltoide dreptunghice* – acestea pot fi cu un unghi drept; sau cu două unghiuri drept~~unghice~~e (construirea acestora cu rigla şi compasul, folosind Cercul lui Thales, este esenţială)
- *deltoid concav* – pe lângă deltoidele convexe prezentate până acum, constatăm că deltoidul este singurul patrulater special care poate fi şi concav. În figura alăturată am reprezentat un deltoid concav dreptunghic.



Observaţie: Se poate uşor demonstra că aria deltoidului este egală cu semiprodusul diagonalelor, chiar şi în cazul deltoidului concav.

Observaţie: La o analiză mai profundă se poate observa că deltoidul şi trapezul isoscel sunt figuri geometrice duale: trapezul isoscel are două perechi de unghiuri alăturate congruente şi o pereche de laturi opuse congruente, pe când deltoidul are aceleaşi proprietăţi dar cu laturile şi unghiurile schimbate între ele, Mai mult, dacă la deltoid unghiurile opuse necongruente au bisectoarea comună, în mod dual, la trapezul isoscel laturile opuse necongruente (bazele) au mediatoarea comună. Ca urmare, trapezul isoscel este inscriptibil, pe când deltoidul este circumscriptibil. (Toate aceste construcții pot fi realizate cu rigla și compasul). În mod special, deltoidul cu două unghiuri drepte este și inscriptibil și circumscriptibil; la fel este și trapezul isoscel circumsriptibil. Atât deltoidul, cât și trapezul isoscel au o singură axă de simetrie.

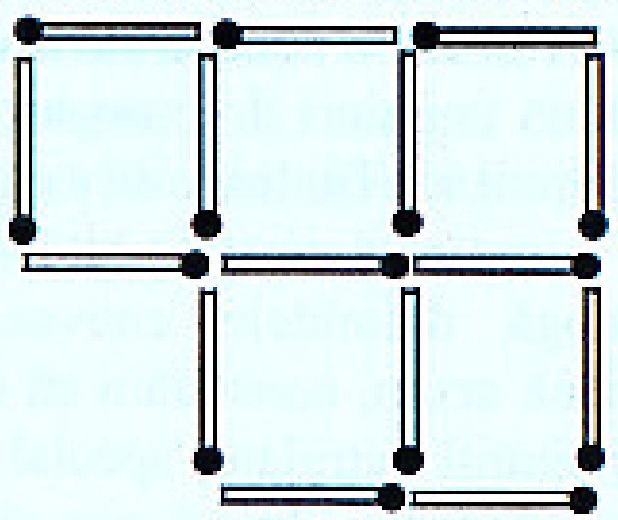
P.S. După cum vedeți, avem aici o lecție accesibilă și deosebit de frumoasă, care merită din plin măcar o oră la clasă.

Probleme distractive

Valeriu Boeriu – colaborator, Toronto, Canada

1. O călimară cu cerneală costă 11 lei. Cerneala costă cu 10 lei mai mult decât călimara goală. cât costă cerneala?

2. Din localitățile A și B aflate la 100 km distanță pornesc unul spre celălalt două trenuri TA și TB, cu viteze constante de 50 km/h. O rândunică pornește din A în același moment cu cele două trenuri, zburând cu viteza constantă de 85 km/h, până când întâlnește trenul B. Se întoarce și, păstrând viteza, zboară înapoi până întâlnește trenul din A. Se întoarce iarăși zburând până la trenul din B, și tot așa până când este strivită de cele două trenuri. Câți km a parcurs în zbor rândunica?



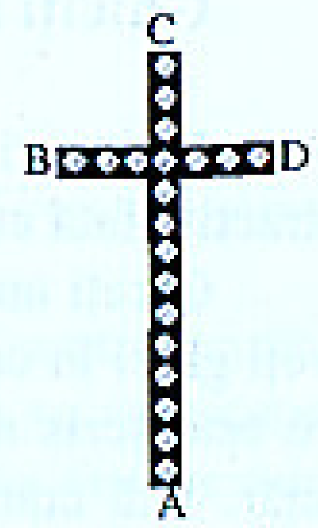
3. Aranjați 10 pomi pe cinci rânduri de câte patru pomi.

4. Găsiți x din șirul: $\frac{5}{52}$; $\frac{6}{63}$; $\frac{7}{x}$.

5. Aranjăm 15 chibrituri ca în figură.
a. Luați patru chibrituri astfel încât să rămână două pătrate;
b. Luați trei chibrituri astfel încât să rămână trei pătrate.

6. Trei exploratori și trei canibali trebuie să traverseze cu o barcă un râu. În barcă încap doar două persoane. Cum vor trece râul, ținând cont de faptul că dacă exploratorii rămân în inferioritate numerică, sunt automat mâncați de canibali?

7. Doi ciobănei unu-i moldovean și unui muntean, discută. Zice moldoveanul: dă-mi o oaie ca să am dublu cât tine. Munteanul răspunde: dă-mi tu o oaie ca să avem la fel de multe. Câte oi are fiecare?



8. O persoană comandă o bijuterie în formă de cruce pentru care dă un număr de pietre prețioase ce trebuie aranjate ca în desenul alăturat, înțelegându-se cu bijutierul ca la sfârșit, pentru verificare, de la capătul A până la fiecare din capetele B, C și D să poată fi numărate 14 pietre. Bijutierul fură două pietre prețioase și crucea confecționată de el îndeplinește condiția cerută. Cum a procedat meșterul?

9. Luați o cutie de chibrituri din care o parte au fost folosite. Dați unui prieten să numere câte chibrituri sunt înăuntru. Apoi cereți-i să adune cele două cifre (unitățile și zecile) ale numărului găsit. Rugați-l apoi să scoată din cutie atâtea chibrituri cât a dat această sumă. În acest moment luați cutia, o scuturați și, evaluând după greutate și sonor, puteți spune cu siguranță câte chibrituri mai sunt înăuntru:0, 9, 18 sau 27 (pentru cutii cu până la 29 de chibrituri). După ce verificați jocul cu un prieten, demonstrați matematic valabilitatea acestuia și generalizați la cutii cu mai multe chibrituri.

10. „Foaie verde de arțari
Câte ciori sunt și câți pari?

Dacă ele stând răzlețe
Ca s-avem un par și-o cioară,
Una din „cinstite fețe"
S-ar roti pe dinafară ....

Iar, dacă cumva ar vrea
Câte două-n par să stea,
Alt neajuns apare iar:
Va rămâne gol un par!"

Rezolvare:
Dacă cioara care zboară
Lângă prima se coboară,
Iar a doua dacă pleacă
Lângă a treia să petreacă,
Aste ciori perechi se pune
Și un par liber rămâne!
S-a găsit, dar, dintr-o dată
Tocmai ceea ce se cată!
Dacă bine socotiți
Patru ciori, trei pari găsiți!

11. Trei prieteni beau bere. Toată berea costă 25 lei. Fiecare dă chelnerului câte o bancnotă de 10 lei. Chelnerul primește 2 lei bacșiș și dă rest fiecăruia câte un leu. După plecarea chelnerului (și terminarea berii) cei trei fac socoteala: $(10-1)\cdot 3+2=27+2=29$. Unde este un leu?

P. S. din partea redacției: dacă ați găsit greșeala din această problemă, încercați-o și pe următoarea:

12. O babă și un moș aveau un cocoș, pe care s-au hotărât să-l vândă. Moșu' se duse cu el la târg și-l vându pentru 25 de lei la doi prieteni. Când ajunse cu banii acasă, baba îl certă că a luat prea mult și-l trimise cu 5 lei înapoi la cumpărători. Pe drum, moșul bău o bere de 3 lei și apoi dădu câte un leu celor doi prieteni. Ajungând acasă socotește: fiecare cumpărător a dat câte 11,50 lei, adică 23 lei și cu 3 lei pe care i-am dat pe bere fac 26 de lei. De unde a apărut un leu?

Ghiciți numărul

Decupați cele șase cartonașe cu numere și obțineți un joc deosebit de distractiv. Iată cum funcționează:

Cereți unei persoane să-și aleagă un număr (natural) de la 1 la 63, pe care îl veți ghici în continuare. Pentru aceasta trebuie doar să vă arate toate cărțile pe care este scris numărul ales. După câteva secunde veți putea să-i spuneți acest număr. Iată cum trebuie să procedați: luați primul număr (cel mai mic) de pe fiecare carte arătată și însumați-le.

Să luăm un exemplu: dacă persoana căreia îi faceți acest joc alege numărul 43, vă va arăta biletele care încep cu 1, cu 2, cu 8 și cu 32. Adunând 1 + 2 + 8 + 32 obținem 43.

Acest joc este deosebit de folositor antrenându-i pe elevii din clasele mici în calculul mintal. Elevii „cu buletin" vor putea chiar să ia taurul de coarne și să înțeleagă mecanismul de al acestui joc, care se bazează pe transcrierea numerelor naturale în baza 2. Pe exemplul ales avem:

$43 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Pentru a înțelege mai bine problema completați și studiați următorul tabel:

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

I II III IV V VI

$1 = 1 \cdot 2^0$

$2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$

$3 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$

$4 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$

$5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$

$6 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$

$7 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$

$8 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$

$9 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$

....

$42 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$

$43 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$

....

$63 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$

M3TOD1CA

Linia mijlocie în triunghi
Studiu de teoremă directă și reciprocele sale

Titus Grigorovici

Odată cu trecerea anilor, predarea devine monotonă pentru profesor, lecțiile repetându-se an de an în aceeași formă și ordine, fapt ce se repercutează negativ și asupra elevilor. Nici nu ne mai tece prin cap că ordinea sau conținutul lecțiilor ar putea fi îmbunătățite, impresia generală fiind că manualele noastre au ajuns la o formă perfectă. Iată în continuare rezultatul strădaniilor mele de a îmbunătăți predarea lecției despre linia mijlocie în triunghi, cât și concluziile la care am ajuns în ceea ce privește includerea în lecțiile din clasele a VI-a și a VII-a a teoremelor reciproce.

Mulți profesori au ajuns la concluzia că, în clasa a VI-a, la prima lecție despre linia mijlocie în triunghi, este de ajuns să se deducă proprietățile acesteia din măsurare (lungimea) și observație (paralelismul). Acestea se concretizează într-o teoremă care, la acest moment, nu se demonstrează. Nici vorbă de a se enunța vre-o teoremă reciprocă. Ca urmare această lecție, împreună cu primele aplicații care sunt deosebit de accesibile, se poate include în capitolul „Triunghiul", la sfârșitul acestuia.

În clasa a VII-a, cel mai devreme în cadrul capitolului „Asemănare", sau chiar, mai bine, în timpul recapitulării de la sfârșitul anului, se poate reveni cu lecția în următoarea formă. Aici se poate studia pe cazul liniei mijlocii în triunghi legătura dintre teoremă și reciprocele sale, atât cele adevărate, cât și cele false. De-abia acum elevii au adunată o experiență suficientă pentru a pătrunde și a înțelege cu adevărat fenomenul propozițiilor reciproce. A-i bombarda de la începutul clasei a VI-a cu reciproce, cărora nu le înțeleg rostul, are urmări doar pe plan psihic, convingându-i pe elevi, sau că sunt incapabili, sau că au tot dreptul să copieze.

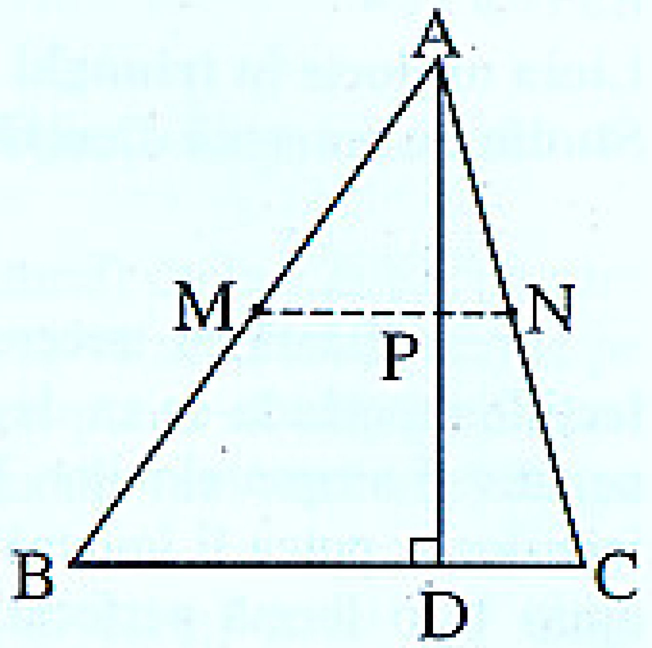
Totodată, elevii vor avea ocazia de a vedea în această lecție o diversitate largă de demonstrații (în manuale teorema directă și cea reciprocă sunt demonstrate pe aceeași cale, folosind paralelogramul). Recomand profesorilor ca în cazul în care condițiile o permit să împartă tabla în patru coloane, în care să se scrie fiecare din următoarele patru propoziții (desigur după enunțarea definiției).

1) Propoziția directă

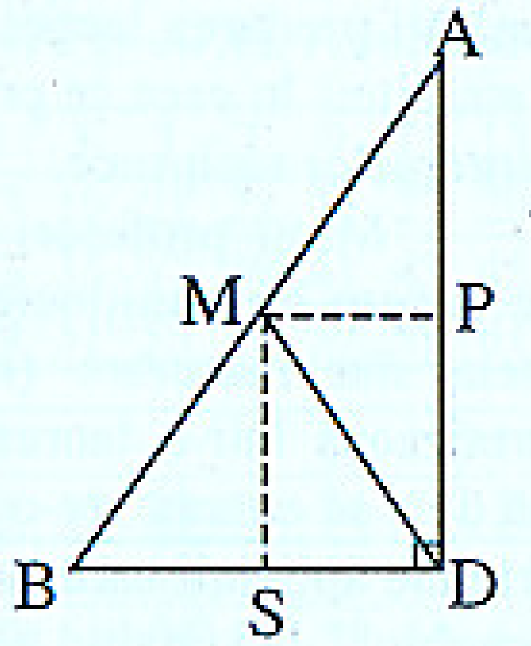
Linia mijlocie în triunghi este paralelă cu latura a treia și are lungimea jumătate din aceasta. Aceasta este teorema de pornire.

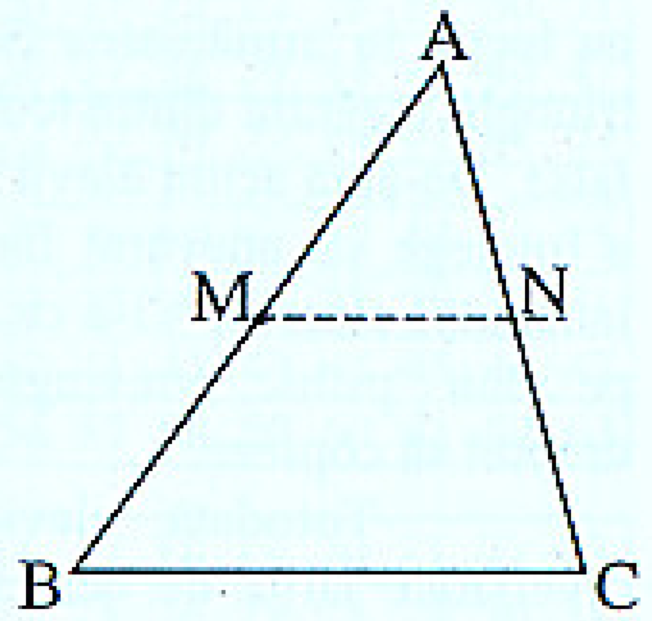
Ipoteza și concluzia se pot transcrie în felul următor:

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mijl. } [AB] \\ N = \text{mijl. } [AC] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MN \parallel BC \\ MN = BC/2 \end{array}\right.$$



Următoarea demonstrație poate fi prezentată elevilor și în clasa a VI-a, în capitolul „Triunghiul", cu condiția să se fi studiat înainte „Cercul lui Thales" (triunghiul dreptunghic înscris în semicerc) și aplicațiile acestuia „Mediana pe ipotenuză". Tăiem triunghiul de-a lungul înălțimii [AD] în două triunghiuri dreptunghice Δ ADB și Δ ADC. În cazul Δ ADB, acesta este împărțit de mediana [DM] pe ipotenuza [AB] în două triunghiuri isoscele: Δ MBD și Δ MAD. La rândul lor acestea sunt împărțite de către înălțimile lor, care sunt și mediane în patru triunghiuri dreptunghice, care sunt evident congruente. Din analiza acestei figuri obținem că $MP = BD/2$, $P = \text{mijl. } [AD]$ și $MP \perp AD \Rightarrow MP \parallel BD$. În același mod se arată că $PN = DC/2$ și $PN \parallel DC$, de unde obținem că $MN = MP + PN = (BD + DC)/2 = BC/2$ și $MN \parallel BC$.





2) Prima reciprocă ½

Paralela dusă prin mijlocul unei laturi a unui triunghi la o altă latură a sa va intersecta a treia latură în mijlocul acesteia.

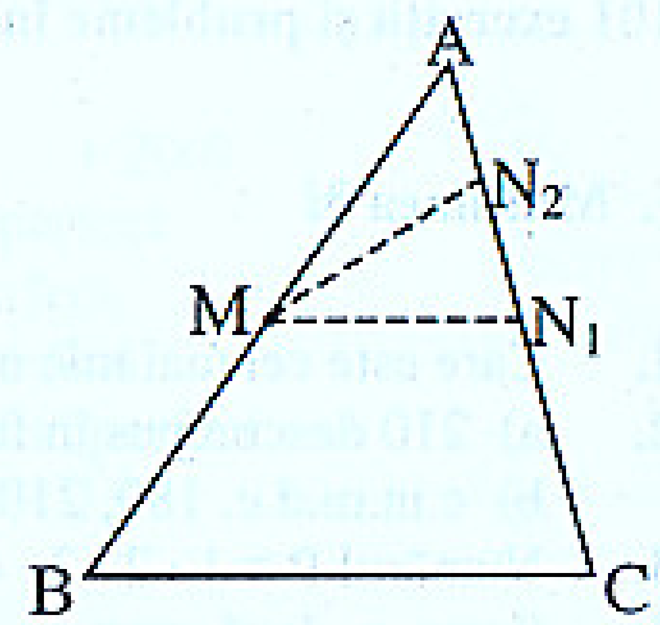
$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mijl.}[AB] \\ MN \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} N = \text{mijl.}[AC] \\ MN = BC/2 \end{array}\right.$$

Dacă putem demonstra această propoziție, atunci va fi numită teoremă reciprocă. Aici se poate face demonstrația din manuale bazată pe proprietățile paralelogramelor, deși elevii observă ușor că se poate demonstra și pe baza teoremei lui Thales sau a teoremei fundamentale a asemănării.

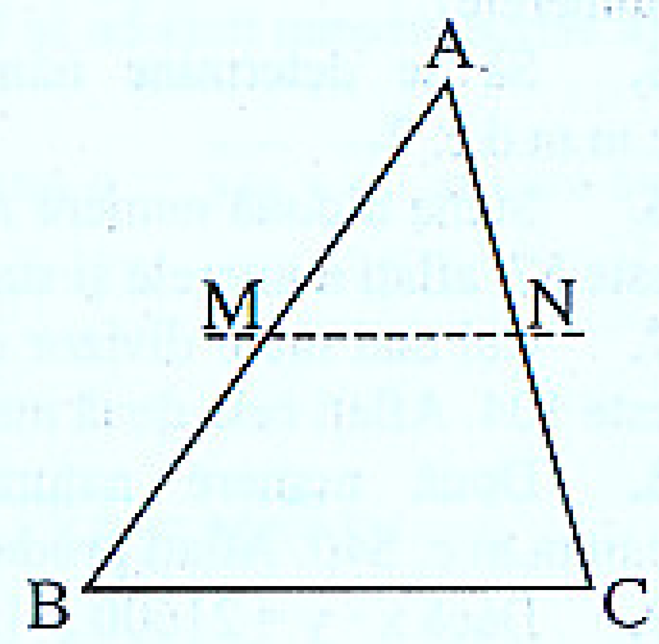
Din analiza schimbărilor efectuate între ipoteză și concluzie observăm că se mai poate da o reciprocă.

3) A doua reciprocă ½

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mijl. } [AB] \\ MN = BC/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} N = \text{mijl.}[AC] \\ MN \parallel BC \end{array}\right.$$



Mulți elevi fără gândire profundă vor fi de acord și cu această „teoremă". Dacă nici un elev nu observă falsul, atunci va trebui să le atragem noi atenția și să-i ajutăm să construiască un contraexemplu. Această reciprocă nu este deci teoremă. Se mai poate construi însă și o a treia reciprocă, prin schimbarea totală a ipotezei cu concluzia.



4) Reciproca totală

$$\left.\begin{array}{l} MN = BC/2 \\ MN \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = \text{mijl.}[AB] \\ N = \text{mijl.}[AC] \end{array}\right.$$

Această reciprocă nu se găsește în nici un manual, deși oricine ajunge să o folosească. Demonstrația prin asemănare a dus însă la neglijarea ei în cadrul capitolului „Patrulatere".

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta\ AMN \sim \Delta\ ABC \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \text{mijl. } [AB] \text{ și } N = \text{mijl. } [AC]$$

Chiar și enunțarea unui text complet, dar cât mai simplu, pentru această teoremă reciprocă, poate reprezenta un exercițiu deosebit de instructiv pentru elevul de clasa a VII-a. O variantă ar fi: Segmentul care se sprijină pe două laturi ale unui triunghi și care este paralel și egal cu jumătate din latura a treia, este linie mijlocie în triunghi.

Concursul P3NT4GON1A ediția a IV-a

va avea loc în **26 octombrie 2002.** Sunt invitate echipaje de câte 5 elevi de clasa a VIII-a însoțiți de un profesor corector. Sunt acceptate pentru înscriere maxim două echipaje din fiecare școală. Materia pentru concurs este cea din clasele V – VII, cuprinsă în programa de capacitate. Vă așteptăm!

82. Aflați a, b ∈ ℝ astfel încât $|a-2\sqrt{3}|+|3b-5|=0$.

83. Aflați perechile (x, y) ∈ ℤ × ℤ pentru care $|3x+2y|+|-x+y|=4$.

84. Diferența dintre numărul a^2 și 72 este egală cu diferența dintre 72 și numărul b^2. Calculați $a^2 + b^2$. Dacă $a \cdot b = 40{,}5$, cât este $|a+b|$?

85. Aflați x știind că $2x + xa + xb = 32$ și $a + b = 6$.

86. Dacă $a+\frac{1}{a}=3$, calculați $a^4+\frac{1}{a^4}$.

87. Fie a, b, c ∈ ℕ; $a + b = 11$, $a + c = 13$, $b + c = 16$. Calculați $ab + ac - bc$

88. Dacă $x^2 + y^2 = 25$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ și $x \cdot y = 12$, care este valoarea expresiei $(x + y)^2$? Dar $x + y$?

89. Știind că $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$, aflați valorile lui x și y.

90. Dacă $x^2 - 8x + 4y^2 + 4y + 17 = 0$, aflați x și y.

91. Rezolvați ecuația: $x^2 + y^2 + 15 = \sqrt{3}\,(2x + 4y)$

92. Găsiți m, n ∈ ℚ astfel încât $m\sqrt{2}+m-3+n\sqrt{2}-n=5\sqrt{2}$.

93. Arătați că ∀ x ∈ ℝ, $x^2 + x + 1$ este pătratul unui număr real.

94. Arătați că pentru orice n ∈ ℕ, $(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4) + 1$este pătrat perfect.

95. Demonstrați că dacă lungimile laturilor unui triunghi satisfac relația: $\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}=0$, atunci triunghiul este isoscel.

96. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este 28, iar diagonala sa este de $\sqrt{21}$. Aflați aria sa totală.

97. Fie $a = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$. Arătați că $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

98. Arătați că $\sqrt{5n+7}$ nu este rațional ∀ n ∈ ℕ.

99. Găsiți x ∈ ℤ astfel încât $\sqrt{\frac{3x-5}{x+1}} \in \mathbb{Z}$.

100. Arătați că $\sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{Q}$, ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$.

101. Arătați că $\sqrt{4n+2} \notin \mathbb{Z}$, pentru orice n ∈ ℕ.

P.5. (pese) – la închiderea ediției

Furatul în școală

În lucrarea sa *O scurtă istorie a Românilor* (Editura Humanitas), Neagu Djuvara încheia în felul următor:

În ochii mei însă (...) moștenirea cea mai tragică constă în faptul că jumătate de secol de comunism ne-a stricat sufletul.

Un regim în care minciuna a fost ridicată la rang de metodă de guvernământ (...), în care furtul nu numai din bunul statului dar și din cel al vecinului, a sfârșit prin a părea legitim din cauza privațiunilor permanente și a exemplului de înșelăciune venit de sus, un asemenea regim nu putea să nu lase urme profunde în mentalități și comportamente(...). Răul mi se pare atât de adânc și de generalizat încât nu știu dacă generația celor care sunt acum tineri îl va mai putea stârpi. Moralitatea batjocorită se repară mai greu decât uzinele învechite. Poate doar generațiile următoare să reușească a regăsi cultul cinstei(...).

Acest citat din Neagu Djuvara ar putea continua în modul cel mai natural cu analiza situației din școli, unde copiii și tinerii sunt în continuare educați să fure, adică să copieze. Ei sunt împinși la aceste gesturi, care au intrat de mult în normalitate, de o materie mult prea grea pentru nivelul și posibilitățile lor. Din clasa a V-a, când începe hărțuirea de către profesori, și până în facultate, majoritatea tinerilor copiază. În aceste condiții cazul profesorilor dați aceste zile afară din învățământ datorită fraudei de la ultima sesiune de Bacalaureat, reprezintă eventual 1% din vârful icebergului.

Care ar fi soluția pentru eradicarea acestui flagel de masă? Aceeași ca și pentru toate celelalte probleme ale învățământului nostru: accesibilizarea reală a materiei și a cerințelor pentru toate vârstele și pentru toți copii de nivel mediu (stabilit de către psihologi, nu de către profesori ambițioși).

Caietele de matematică P3NT4GON1A
Avizate de Direcția Generală a Învățământului Preuniversitar
TITUS GRIGOROVICI – redactor coordonator
MARIANA GRIGOROVICI – redactor și tehnoredactor
Caiet de matematică P3NT4GON1A - Nr. 9, ISBN – 973 – 8313 – 37 – 6
EDITURA TRIADE, CLUJ – NAPOCA
Tipărit la TIPOGRAFIA PRINTEK, CLUJ – NAPOCA, tel. 0722-510747