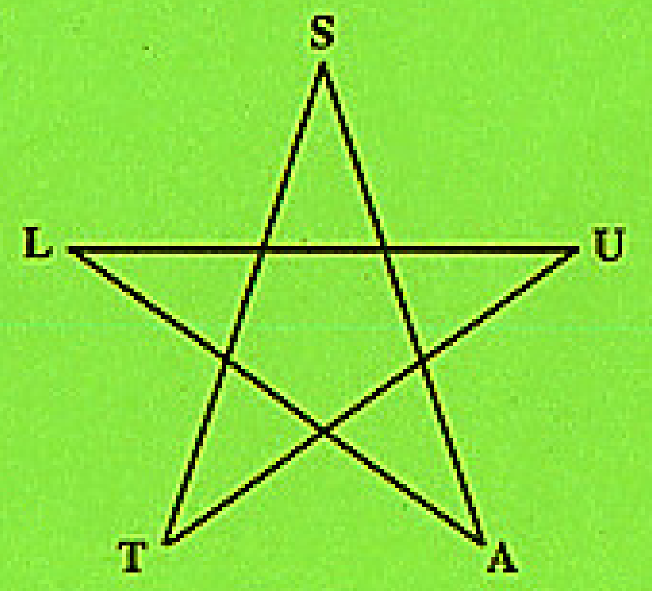
FLASH LA FIN4L

- Matematica apare din nou în muzică. **Antract** ne-au povestit vara asta de iubirea de la $-\infty$ la $+\infty$
- În bătălia dintre Doamna Ministru Ecaterina Andronescu şi numeroasele edituri cu manualele lor pentru clasa a XI-a, a ieşit învingător Domnul Profesor Mircea Ganga. Se mai întâmplă şi minuni; sau poate am luat-o, în sfârşit pe drumul cel bun.
- $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx\pi$ (aproximate până la nivelul sutimilor: 1,41 + 1,73 = 3,14). $\sqrt{2}$ apare în pătrat, $\sqrt{3}$ în triunghiul echilateral, iar π în cerc. Conform teoriei lui Kandinsky avem aici tricolorul (roşu, galben şi albastru – vezi P3NT4GON1A Nr. 6). Ce frumos le-a aranjat Dumnezeu pe toate!

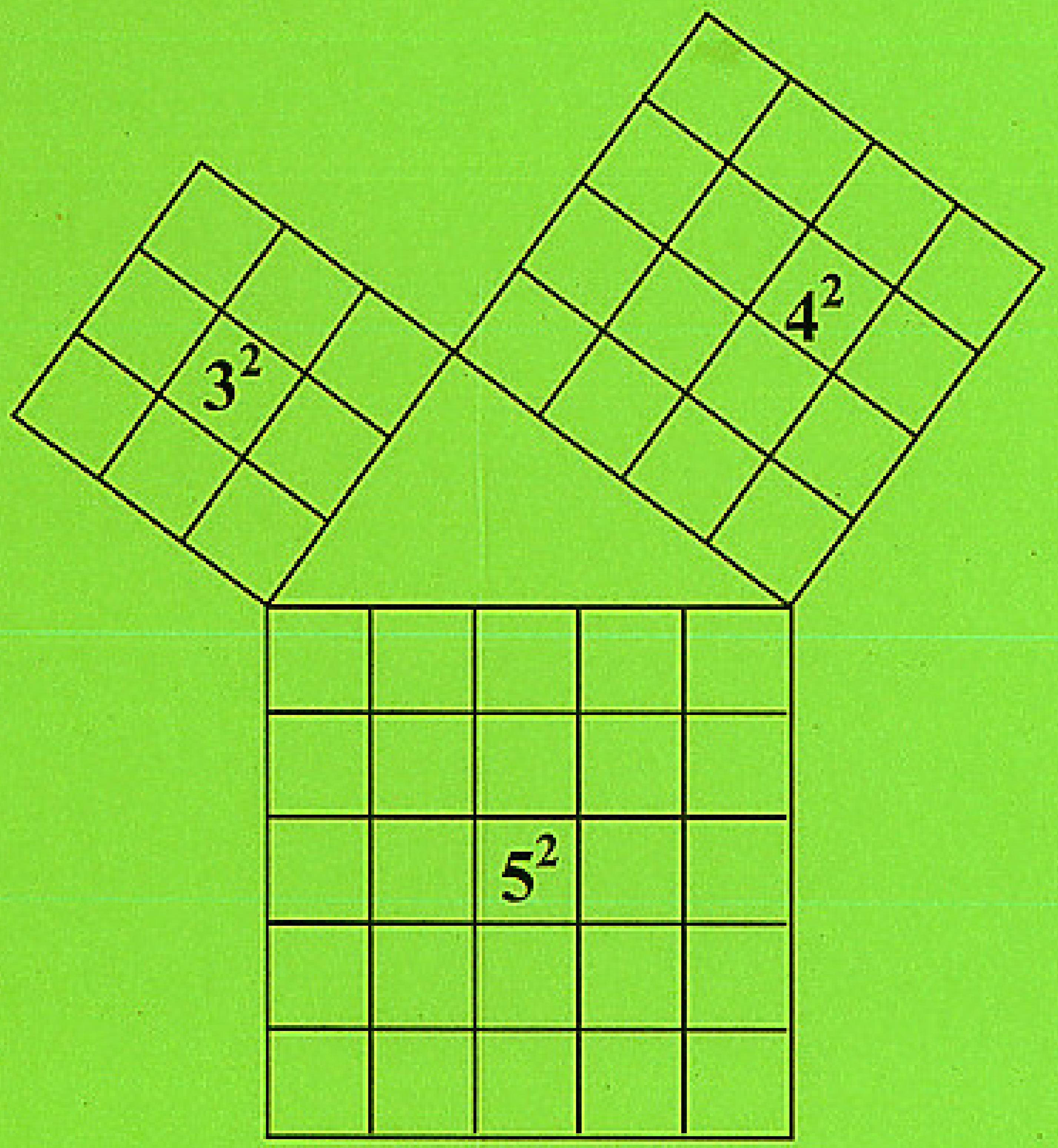


Editura TRIADE 2001
ISBN: 973 – 9196 – 87 – X

CAIETE DE MATEMATICĂ

P3NT4GON1A

REDACTORI
MARIANA & TITUS GRIGOROVICI



Predarea ariilor în gimnaziu
Cel mai mic memorator matemetic cunoscut
Demonstraţii ale teoremei lui Pitagora

NUMĂRUL 8
SEPTEMBRIE 2001

Din nou la şcoală

Iată-ne din nou împreună, cu un nou caiet P3NT4AGON1A, dedicat în mare parte geometriei. De la poezii şi teorii despre trandafiri, până la arii şi demonstraţii ale teoremei lui Pitagora, acest caiet „musteşte" de geometrie. În aşteptarea unui material ce va cuprinde toată geometria gimnazială, ne mulţumim acum cu o prezentare cât de cât completă a predării noţiunii de arie.

Am încercat totuşi să nu neglijăm nici latura algebrică. Pe lângă faptul că sprijină intens articolele despre geometrie, algebra este prezentă în c.m.m.m.m.c şi în a doua parte a colecţiei „101 ecuaţii cu radicali". În afară de acestea vă prezentăm o teorie personală despre reprezentarea grafică completă a parabolei, teorie ce datează din 1992, fiind publicată într-o primă formă în „Didactica matematicii", vol 8.

În final vă invităm la ediţia a III-a a concursului de matematică P3NT4AGON1A, adresat elevilor de clasa a VIII-a, concurs ce va fi organizat anul acesta împreună cu Şcoala Eugen A. Pora" din Cluj în data de 27 octombrie. Vă aşteptăm să vă înscrieţi până în data de 10 octombrie cu echipaje de cinci elevi însoţiţi de un profesor corector la telefon 098 601 275.

Titus Grigorovici

CUPRINS

Caietele de matematică P3NT4GON1A
Avizate de Direcţia Generală a Învăţământului Preuniversitar
TITUS GRIGOROVICI – redactor coordonator
MARIANA GRIGOROVICI – redactor şi tehnoredactor
Caiet de matematică P3NT4GON1A - Nr. 8, ISBN – 973 – 9196 – 87 – X
EDITURA TRIADE – C.P. – 1 – 400, 3400 CLUJ – NAPOCA
Tipărit la TIPOGRAFIA PRINTEK, CLUJ – NAPOCA, tel. 092-510747
Comenzi la tel. 098-601275

PREZENTARE DE CAR7E

Egmond Colerus – „De la tabla înmulţirii la integrală"
– „De la punct la a patra dimensiune"

Cărţile lui Egmond Colerus au apărut în original în perioada interbelică, iar în româneşte la Editura Ştiinţifică în 1967, în traducerea profesorilor S. şi C. Teleman. Cele două volume sunt de o valoare metodică şi practică atât de ridicată, încât studiul lor ar trebui să fie obligatoriu în orice facultate ce pregăteşte profesori de matematică. Faptul că Egmont Colerus nu a fost matematician i-a permis o tratare degajată şi atractivă, plăcută cititului, lectura curgând ca un roman de la apariţia tablei înmulţirii până la integrală, de la Thales până la geometria celei de-a patra dimensiuni.

Ne permitem, în continuare, să cităm unele idei din prefaţa celor două volume, cuvintele autorului exprimând cel mai bine gândurile sale legate de aceste extraordinare cărţi.

Matematica este ca o capcană. Cel prins în ea rareori găseşte calea care să-l readucă în starea de spirit anterioară. Ar dura prea mult explicarea motivelor acestui fenomen caracteristic. De aceea vrem doar să stabilim consecinţele lui. Prima consecinţă a asemănării matematicii cu o „capcană" este marea lipsă de pedagogi ai matematicii. Foarte rar se întrunesc talentul la matematică cu expunerea clară a matematicii. De aici rezultă o a doua consecinţă, şi anume „complexul de inferioritate faţă de matematică" al unor pături largi de oameni instruiţi sau dornici de a se instrui.(...)

Am observat propriile mele suferinţe şi suferinţele colegilor mei de şcoală, de aceea am trecut la înfăptuirea intenţiei de a descrie felul în care am trăit matematica într-un stadiu relativ incipient al formării mele şi trebuie să mă feresc eu însumi în mod conştient de „capcana" pe care o cunosc şi din care peste câţiva ani nu voi mai putea ieşi.(...)

Este cu totul nesatisfăcător, aproape un scandal cultural, faptul că cititorul unei lucrări de nivel nu prea înalt se află dintr-o dată în faţa unui noian de hieroglife, care îl înspăimântă şi-l îndepărtează; sau că el trebuie să se lase pe seama unui număr mic de iniţiaţi, care-l tratează cu ironie.(...)

În primul rând se întâmplă ca doritorii de cultură (...) să dorească să cunoască lumea noţiunilor „neplăcutei" matematici pe o altă cale decât aceea şcolărească, să pornească de la tabla înmulţirii până la integrală pe alt drum, pentru a-şi însuşi ceea ce este mai general şi, în acest mod să ajungă la o linişte interioară. Este posibil ca doritorii de cultură să aspire la mai mult. Atunci ei se *putea lăsa, după modesta mea introducere, cu toată încrederea, pe mâna sigură a (...)* specialiştilor *şi pe această cale putea ajunge oricât de departe dori, până cădea în „capcană" şi nu mai înţelege nimic din risipa de cuvinte şi din naivitatea mea. Aceşti cititori fi mândria mea, chiar dacă ulterior mă dispreţui profund.*

Se mai poate întâmpla ca şcolarii să se servească de cartea mea ca de un material proscris. Pentru aceasta, rog pe toţi pedagogii să-mi acorde iertare şi să nu mă denunţe ca „corupător al tineretului". Declar acestor tineri că, incontestabil, în cazul contradicţiilor nu trebuie să mă creadă pe mine, ci pe profesorul lor de matematică.(...)

Poetul Novalis a spus: „Viaţa zeilor este matematica. Toţi trimişii zeilor trebuie să fie matematicieni... Matematicienii sunt singurii fericiţi. Adevăratul matematician este un entuziast din . Fără entuziasm nu poate fi nici matematică". M-aş considera fericit dacă aş şti că am reuşit să transmit cititorilor mei măcar o adiere a acestui spirit, deoarece, din păcate, „complexul de inferioritate faţă de matematică" produce, ca orice complex de acest fel, sentimentul urii şi al resentimentului.(...) Voi încerca să combat prin lucrarea de faţă repulsia faţă de cea mai pură, aproape aş spune cea mai sfântă dintre toate ştiinţele.(...)

Marele Leibniz a spus că filozofia nu este decât anticamera înţelepciunii; dacă mi se permite să-mi apropii această cugetare şi să o aplic, puţin modificată, la a doua mea carte, voi spune despre ea că este „anticamera geometriei". Acolo, în interiorul sanctuarului, tronează toate figurile mari: Pitagora, Euclid, Arhimede, Napier, Descartes, Legendre, Poncelet, Lobacevski, Gauss, Riemann, Beltrami, Veronese, Poincare, Hilbert; dar în anticameră este nevoie de un secretar pentru a îndruma pe cei ce aşteaptă cu nerăbdare dar plini de respect să fie primiţi înăuntru, cum trebuie să procedeze pentru a putea să se apropie de aceşti oameni mari fără a risca să fie imediat concediaţi.(...)

Iar acum, deoarece nu se poate altfel, dat fiind că în matematică nu există cale pentru regi, trebuie ca cititorul împreună cu mine să lucrăm împreună, intens, pentru a ajunge de la înmulţire la integrală, de la punct la a patra dimensiune. Sper că, în principiu, voi fi oferit posibilitatea pentru atingerea acestui scop. Adversarii mei avea apoi cuvântul. ☻ ☺

Viena, 8 sept. 1934 ; 20 sept. 1935 *EGMONT COLERUS*

D-4LE PROFE5OR1LOR

Drama geometriei

A fost odată ca niciodată, că dacă n-ar fi fost, nu s-ar mai fi povestit, demult, pe vremea când elevii de azi nici nu erau născuţi, a fost pe vremea aceea o materie pe care toată lumea o iubea. Profesorii o predau cu pasiune, iar pentru elevi era una dintre materiile preferate. Ea se numea geometrie şi era de neam vechi şi nobil; strămoşii ei fiind cunoscuţi din antichitate iar în timpul Renaşterii fiind considerată chiar o artă.

Această materie a avut şi pe meleagurile noastre ca mentori o serie de maeştri care au adus-o la o popularitate şi strălucire ieşite din comun. Ultimul dintre aceştia a fost profesorul A. Hollinger, manualele sale reuşind să trezească în sufletul elevilor o dragoste deosebită pentru geometrie.

Dar, iată că nori negri şi grei începeau să se adune la orizontul geometriei. Pe alte meleaguri apăreau mari enciclopedii de matematică, ce ordonau geometria pur axiomatic. Această ordonare se trăgea din ideile marelui matematician german David Hilbert. Pentru matematicieni, această ordonare absolută era considerată „ultima frontieră" în geometrie, recunoscut fiind faptul că, odată cu apariţia ciudatelor geometrii neeuclidiene, geometria clasică nu mai oferea nici o posibilitate de extindere. Aceste ordonări erau realizate de către specialişti de vârf, pentru specialişti, studenţi şi profesori. Dar nu aceste ordonări axiomatice au dăunat geometriei, ci ideea de a le implanta în învăţământul preuniversitar. Ordonarea riguros axiomatică a fost introdusă în liceu, după care acest manual a fost adaptat la gimnaziu. Dacă în liceu mai existau şanse ca elevii să priceapă despre ce este vorba, în gimnaziu aceste şanse au fost reduse la un minuscul ε. Dacă pe vremea manualelor profesorului Hollinger, majoritatea elevilor înţelegeau şi îndrăgeau geometria, în anii `80 doar 2 – 3, cel mult un sfert din elevii unei clase mai înţelegeau ceva. Prin `83 – `84, când am început să mă pregătesc pentru facultate, profesorul la care mergeam pentru sfaturi şi îndrumări, mi-a recomandat la geometrie parcurgerea manualelor de geometrie de gimnaziu, pentru că „aveau problemele mult mai grele decât materialul de liceu". Iar manualele alternative apărute în ultimii ani au reuşit să definitiveze statutul de „persona nongrata" a geometriei în şcoală.

Slăbită fiind de aceste lovituri primite în ultimii 20 de ani, geometria a primit la pragul dintre milenii şi ultima mare lovitură: eliminarea cvasi-totală din materia de liceu; de acolo de unde elevii aveau în sfârşit dezvoltarea necesară de a face şi a savura geometrie de înaltă clasă. Eu, de exemplu, elev fiind în clasa a IX-a, am reuşit o generalizare a formulei pentru aria triunghiului. Nu voi uita niciodată entuziasmul şi bucuria nemăsurată pe care le-am trăit în acele clipe.

O durere de nedescris îmi umple sufletul acum, când îmi dau seama că elevii de azi nu mai au ocazia de a cunoaşte această bucurie.

Mă gândesc, cu ce aş putea compara mai bine situaţia actuală a geometriei: cu a Cenuşăresei sau cu a Albei ca zăpada. Cred că amândouă se potrivesc; geometria a fost batjocorită aidoma Cenuşăresei de către surorile şi mama vitregă, dar a fost şi alungată din liceu ca Albă ca zăpada din castel de către vrăjitoare. Rămâne speranţa în prinţul care trebuie să vină, ca în poveşti şi să salveze geometria, pentru a trăi împreună fericiţi, până la adânci bătrâneţi.

Titus Grigorovici

*

DIE ZWEI PARALLELEN	CELE DOUĂ PARALELE
Es gingen zwei Parallelen ins Endlose hinaus, zwei kerzengerade Seelen und aus solidem Haus.	Două paralele-mpreună curgeau la infinit. Erau de familie bună cu sufletul drept şi cinstit.
Sie wollten sich nicht schneiden bis an ihr seliges Grab : Das war nun einmal der beiden geheimer Stolz und Stab.	Visau să nu se separe până-n sufletescul mormânt. Era mândria lor mare şi singurul lor cuvânt.
Doch als sie zehn Lichtjahre gewandert neben sich hin, da wards dem einsamen Paare nicht irdisch mehr zu Sinn.	Dar trec ani-lumină şi, iată, văzând cum timpul goneşte, perechea însingurată n-a mai simţit pământeşte.
War'n sie noch Parallelen ? Sie wussten selber nicht, – sie flossen nur wie zwei Seelen zusammen durch ewiges Licht.	Erau ? Mai erau paralele abstractele lor linii ? Curgeau, neştiind nici ele, curgeau prin vecia luminii.
Das ewige Licht durchdrang sie, da wurden sie eins in ihm ; die Ewigkeit durchdrang sie als wie zwei Seraphim.	Şi-eterna lumină-i sorbi cu palizii-i ochi anonimi. Pieriră în veşnicii asemeni cu doi serafimi.

☺☻

Christian Morgenstern

ME7ODICA

Predarea ariilor în gimnaziu

Ariile reprezintă, alături de teorema lui Pitagora, momentul în care elevii încep să îndrăgească geometria. Aceasta în special datorită faptului că acum încep în sfârşit să socotească la geometrie. Din păcate acest frumos capitol a fost făcut harcea – parcea de programa în vigoare, fiind pur şi simplu împrăştiat din clasa a V-a până într-a VII-a. Şi, ca şi cum aceasta n-ar fi fost de ajuns, autorii de manuale au dat „Ariilor" lovitura de graţie prin pasaje de genul: *„Iată câteva elemente legate de aria unui triunghi.*

Aria unui triunghi este egală cu jumătate dintre lungimea unei laturi şi lungimea înălţimii corespunzătoare laturii,...

***Teoremă:** Două triunghiuri congruente au aceeaşi arie.*

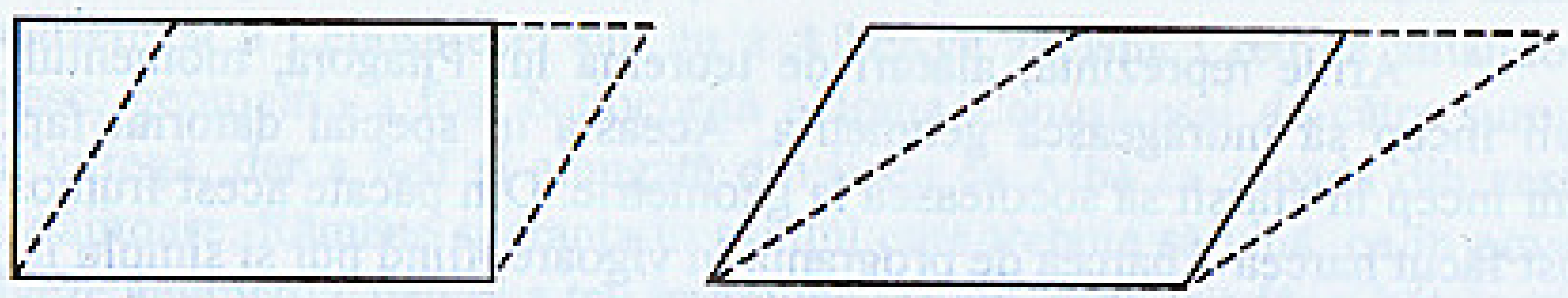
***Demonstraţie:** ..."*

Autorii manualului din care am prezentat citatul de mai sus, nu consideră aşa de importantă formula de calcul a ariei triunghiului, de vreme ce nu o evidenţiază în -un fel (boldire, subliniere, colorare). Nici demonstrarea, în -un fel, a acestei formule nu este prezentată elevilor. În schimb, după părerea acestor autori, este vital ca elevii să priceapă, cu titlu de teoremă că două triunghiuri congruente au aceeaşi arie; în plus această teoremă stupidă trebuie şi demonstrată. Aceşti pseudo-dascăli n-au înţeles nimic din gândirea elevului, fiind blocaţi cu capul în nori. În această lecţie vedeta este regula de calcul a ariei, iar elevul ar trebui să afle de unde se deduce aceasta. Faptul că două figuri congruente au aceeaşi arie este absolut evident, elevii neînţelegând ce ... profesorul.

În speranţa că mai sunt profesori interesaţi de o predare în beneficiul elevilor şi care au curajul de a se detaşa de tiparul manualului, iată în continuare câteva aspecte metodice legate de predarea ariilor:

1. Aria este măsura unei suprafeţe. Foarte sec spus, aria este un număr iar suprafaţa un obiect. Este evident că notarea ariei cu *S* este greşită, acest *S* sugerând suprafaţa, nu aria.

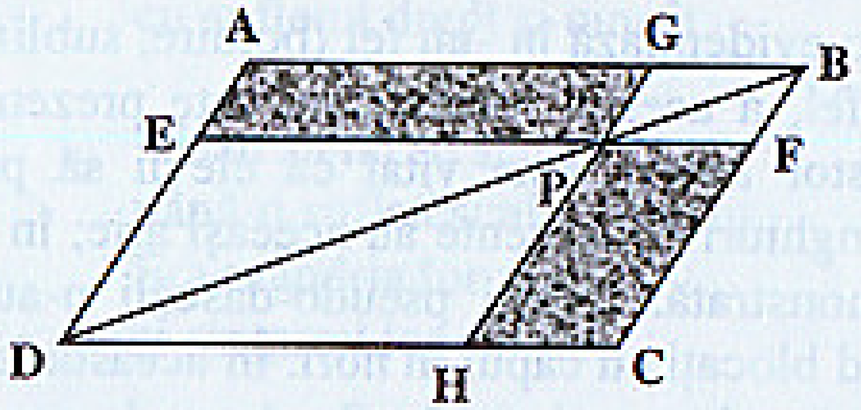
2. Aria măsoară cât de mare este interiorul unei suprafeţe (limitate de o linie închisă). Edificatoare în acest sens este traducerea din limba germană: FLÄCHENINHALT = CONŢINUTUL SUPRAFEŢEI. Înainte de a începe să măsurăm această suprafaţă este bine să dezvoltăm la elevi un simţ pentru mărimea suprafeţei. Deci, înainte de a ajunge la numere, este bine ca elevii să aproximeze „din ochi" mărimea unei suprafeţe. Aceasta se poate face uşor studiind figuri de forme diferite dar cu suprafeţe de aceeaşi mărime (figuri echivalente). În Şcoala Waldorf, aceasta se face în cadrul lecţiei „Forfecarea paralelogramelor". Iată, în detaliu, această lecţie.



În figura de mai sus, decupăm o porţiune triunghiulară dintr-un dreptunghi, şi o ataşăm în partea cealaltă, obţinând un paralelogram. Este evident că paralelogramul are aceeaşi mărime ca şi dreptunghiul. Operaţia se poate repeta, obţinându-se un nou paralelogram cu aceeaşi mărime a suprafeţei. Concluzionăm:

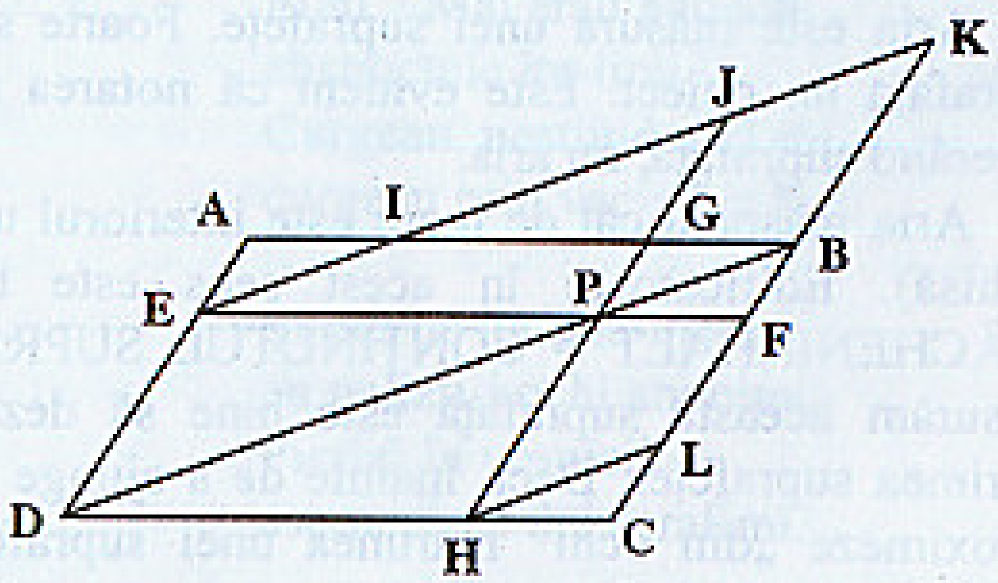
Teoremă: Mărimea suprafeţei unui paralelogram nu se schimbă dacă translatăm o latură a sa pe dreapta suport. Această transformare se numeşte „forfecare a paralelogramului".

După analiza acestui fenomen putem lua următoarea problemă, cunoscută sub denumirea de „Figura Gnomon".



Pe diagonala [BD] a paralelogramului ABCD se ia punctul P. Prin P se duc paralelele EF || AB şi HG || BC. Arătaţi că paralelogramele AEPG şi CFPH au aceeaşi mărime a suprafeţei.

Cerinţa acestei probleme este uluitoare pentru elevi: se vede că cele două paralelograme nu sunt congruente şi totuşi, interioarele lor sunt la fel de mari, adică cele două suprafeţe sunt echivalente. Iată şi demonstraţia ce foloseşte teorema de mai sus. Printr-o succesiune de forfecări şi o translaţie, mutăm paralelogramul AEPG, schimbându-i forma, dar nu şi mărimea



suprafeţei, până când obţinem paralelogramul CFPH: AEPG ~ IEPB ~ KJPB ≡ ≡ BPHL ~ FPHC (am construit EK || BD || HL).

Ca temă, elevii pot primi sarcina de a demonstra problema, ducând paralelogramul prin colţul stânga-jos al figurii.

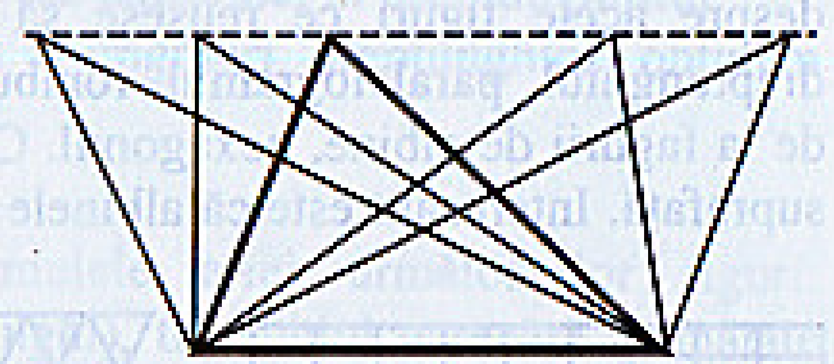
Atrag atenţia că în toată această lecţie nu se foloseşte deloc noţiunea de arie. Aria ca măsură a suprafeţei apare de-abia după ora următoare.

Cu forfecarea paralelogramelor ne putem întâlni mai târziu, la teorema lui Pitagora, când elevii construi pătratul ipotenuzei din cele două pătrate ale catetelor. (Vezi demonstraţia 1 de la pagina 11).

Întărirea simţului pentru mărimea suprafeţei se face în ora următoare prin lecţia „Forfecarea triunghiurilor".

Se ştie că orice paralelogram se descompune pe diagonală în două triunghiuri congruente. Cu alte cuvinte, mărimea suprafeţei unui triunghi este jumătate din mărimea suprafeţei paralelogramului corespunzător. Destul de uşor deducem următoarea

Teoremă: Mărimea suprafeţei unui triunghi nu se schimbă dacă modificăm triunghiul, mutând un vârf paralel cu latura opusă.

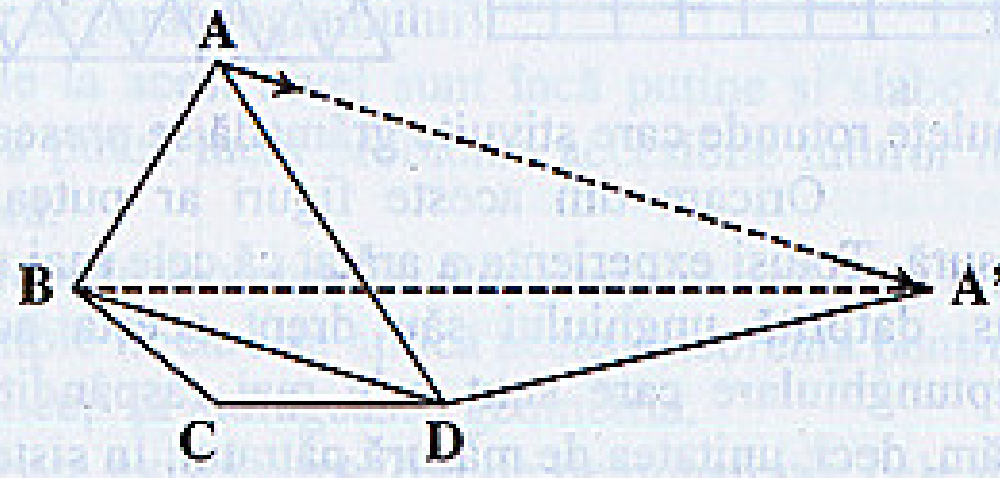


Folosind această teoremă putem transforma diferite suprafeţe poligonale în alte suprafeţe cu proprietăţi impuse.

Exemplul 1: Fie patrulaterul oarecare ABCD. Transformaţi-l într-un trapez cu aceeaşi mărime a suprafeţei.

ABCD → A`BCD unde

A`B || CD şi AA` || BD.

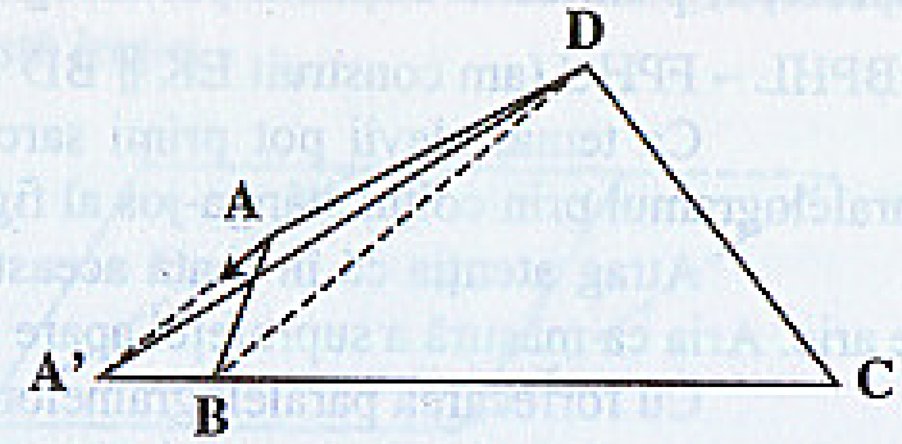


Exemplul 2: Se dă un patrulater concav. Transformaţi-l într-un patrulater convex cu aceeaşi mărime a suprafeţei.

Exemplul 3: a) Transformaţi un patrulater într-un triunghi echivalent.

b) Idem, pornind de la un pentagon.

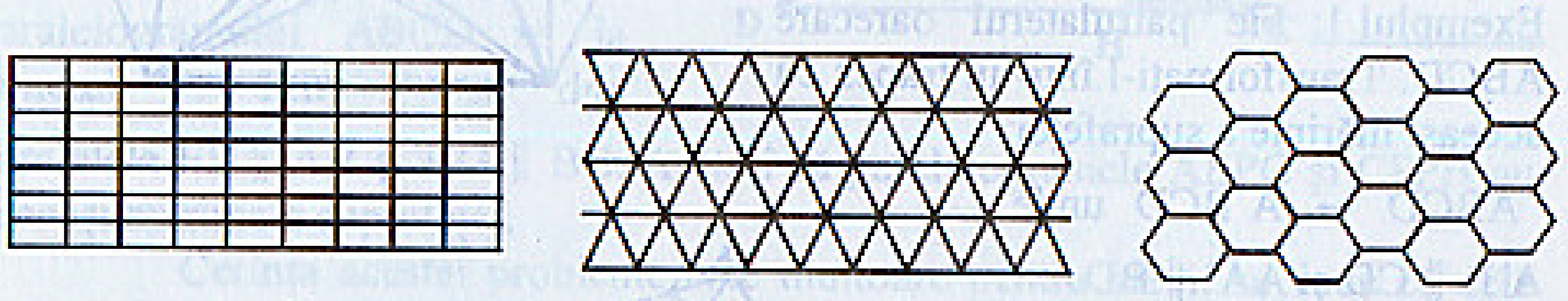
ABCD → A`CD (AA` ∥ BD).



Este important ca aceste două lecţii, „Forfecarea paralelogramelor" şi „ Forfecarea triunghiurilor" să fie parcurse fiecare în câte o oră. La începutul orei cu forfecarea triunghiurilor, înaintea teoremei, pe baza observaţiei „ diagonala împarte paralelogramul în două triunghiuri congruente", se poate da cu elevii o demonstraţie mult mai uşoară a „figurii gnomon". Această demonstraţie nu trebuie însă dată în aceeaşi oră cu demonstraţia bazată pe forfecarea paralelogramelor. Scopul nostru nu este rezolvarea problemei ci formarea unui simţ pentru transformarea suprafeţelor echivalente.

3. După ce, timp de două ore, am vorbit de mărimea unei suprafeţe, începem acum să o şi măsurăm.

Pentru a stabilii o unitate de măsură se poate discuta câteva minute despre acele figuri ce reuşesc să parcheteze complet o suprafaţă: pătratul, dreptunghiul, paralelogramul, rombul, triunghiul şi desigur „vedeta" cunoscută de la fagurii de albine, hexagonul. Cercurile (discurile) nu putea acoperi total o suprafaţă. Interesant este că albinele nu-şi fac fagurii hexagonali ci rotunzi: nişte



tubuleţe rotunde care stivuite grămadă se presează şi iau formă hexagonală.

Oricare din aceste figuri ar putea fi considerate drept unitate de măsură. Totuşi experienţa a arătat că cele mai uşoare calcule le oferă pătratul. În plus, datorită unghiului său drept acesta acoperă cel mai bine suprafeţele dreptunghiulare care sunt cele mai răspândite (podele, pereţi, grădini etc.). Luăm, deci, unitatea de măsură pătratul. În sistemul metric se folosesc mm^2, cm^2, dm^2, m^2, arul = dam^2, hectarul = hm^2 şi km^2.

Înaintea calculului ariilor prin formule, trebuie găsită aria unei figuri prin numărarea pătrăţelelor pe hârtie milimetrică. Pentru a se lucra eficient, se împarte clasa în grupe (rândul A, B, C fiecare cu un triunghi, paralelogram respectiv romb dat).

Unii elevi găsi, în timp ce numără milimetrii pătraţi diferite şmecherii. Fără a le încuraja, în prima fază, acestea duce totuşi la ideea de formulă de arie, ca o reţetă ce înlocuieşte numărătoarea grea cu un calcul simplu şi eficient. Însă, de-abia ora următoare vom aborda oficial aceste formule. Până atunci gândirea elevilor va avea timp să se acomodeze cu ideea de arie, ca număr ce exprimă conţinutul unei suprafeţe.

4. Elevii care au reuşit să fenteze numărătoarea milimetrilor prin diferite observaţii având la bază aria dreptunghiului, aceşti elevi savura descoperirea rând pe rând a formulelor de arie.

Pentru că ordinea cu care suntem obişnuiţi din manuale este atât de diferită de ordinea firească, vă prezentăm pe scurt această lecţie.

Baza întregii lecţii este aria dreptunghiului ce se determină logic pe baza figurii alăturate. A porni această lecţie prin definirea ariei triunghiului este una dintre cele mai mari gafe metodice cu putinţă.

Aria pătratului se determină ca un caz particular al dreptunghiului.

Împărţind dreptunghiul în două triunghiuri dreptunghice obţinem formula $\frac{c_1 \cdot c_2}{2}$.

În acelaşi stil se găsesc formulele ariei următoarelor figuri: paralelogramul (prin forfecarea unui dreptunghi), triunghiul oarecare (jumătate din paralelogram), rombul (jumătate din dreptunghiul în care este înscris) şi trapezul. În final se mai pot găsi două formule: pătratul (caz particular al rombului) şi rombul (caz particular al paralelogramului).

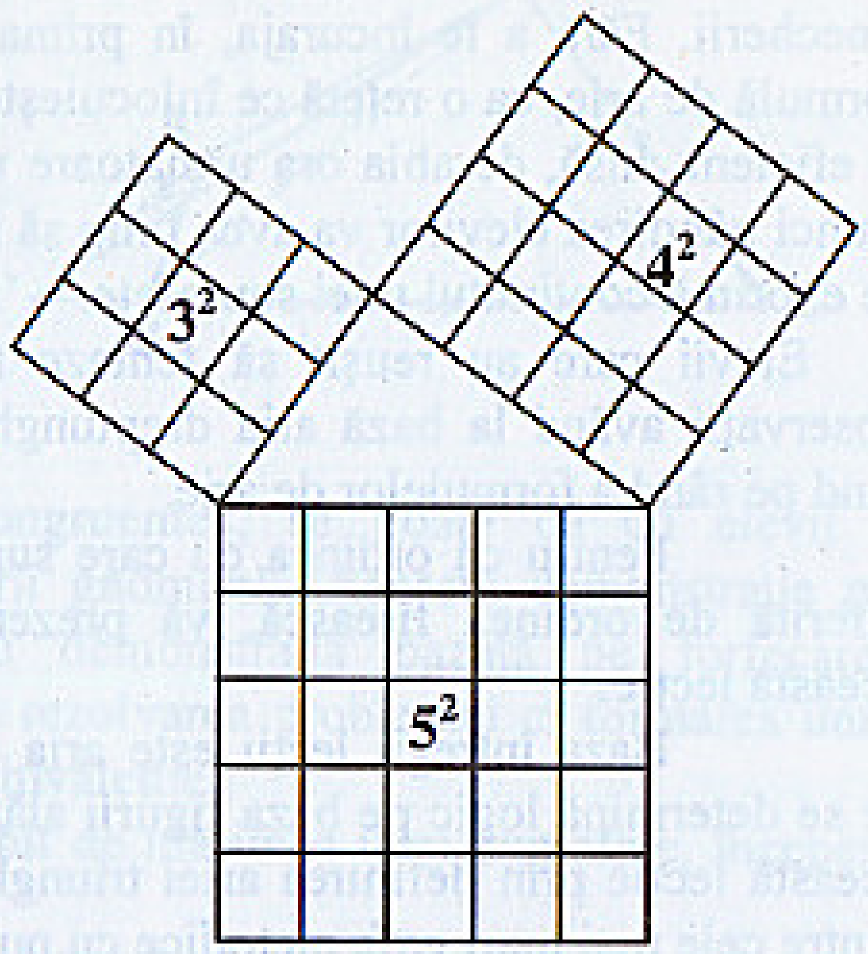
Exerciţiile şi problemele la acest nivel sunt încă puţine şi slabe din punct de vedere calitativ. Pentru a putea lucra probleme accesibile tuturor mai avem nevoie de teorema lui Pitagora.

5. Cu cât elevii stăpânesc mai repede teorema lui Pitagora, cu atât mai bine, pentru că, odată cu problemele simple în care se aplică această teoremă pentru a calcula aria sau perimetrul, elevii încep să îndrăgească geometria.

Pentru teorema lui Pitagora există circa 200 de demonstraţii, cele mai multe dintre acestea fiind pe bază de arii. Totuşi nu e bine să bombardăm elevii din prima oră cu prea multe demonstraţii. Una – două ajung. Iată, în continuare, o posibilitate de predare a celei mai importante lecţii din geometria gimnazială.

După diferite elemente istorice (Egiptul antic etc.) se poate analiza că „suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei", construind figura în cazul triunghiului egiptean ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

Prima demonstrație poate fi una prin forfecări și translatări de paralelograme (dem. 1; pag 11). Demonstrația a doua (pag 12) bazată pe forfecări ale triunghiurilor, poate fi redactată și cu ajutorul congruenței triunghiurilor. În funcție de cum evoluează materia, ulterior pot fi parcurse și alte demonstrații.



Odată învățată teorema lui Pitagora, urmează o serie de ore în care parcurgem toate posibilitățile tradiționale de calcul a ariei sau perimetrului figurilor de bază (dreptunghi, romb, paralelogram, trapeze), mai întâi cu numere întregi, apoi cu fracții și cu numere iraționale (pătratul, triunghiul echilateral etc.).

Predarea teoremei lui Pitagora la începutul clasei a VII-a după rădăcina pătrată, la sfârșitul capitolului Arii, prezintă o serie de avantaje și un dezavantaj. Dezavantajul se referă la neconcordanța cu materia pentru olimpiadă. Avantajele merg de la faptul că toți elevii au la îndemână destul de repede cel mai eficient instrument de calcul în geometrie (care poate fi ușor completat cu formula $h = c_1 \cdot c_2 / ip$), până la faptul că astfel profesorii de matematică au siguranța că predau ei această lecție înaintea celor de fizică (datorită neconcordanței programelor elevii învață deseori teorema lui Pitagora mai întâi la fizică). ● ☺

Rezultatul întotdeauna UNU

Luați un număr la întâmplare. Înmulțiți-l cu el însuși. La rezultat adunați numărul ales.Acest nou rezultat împărțiți-l la numărul ales și apoi scădeți numărul ales. Rezultatul final este întotdeauna 1.

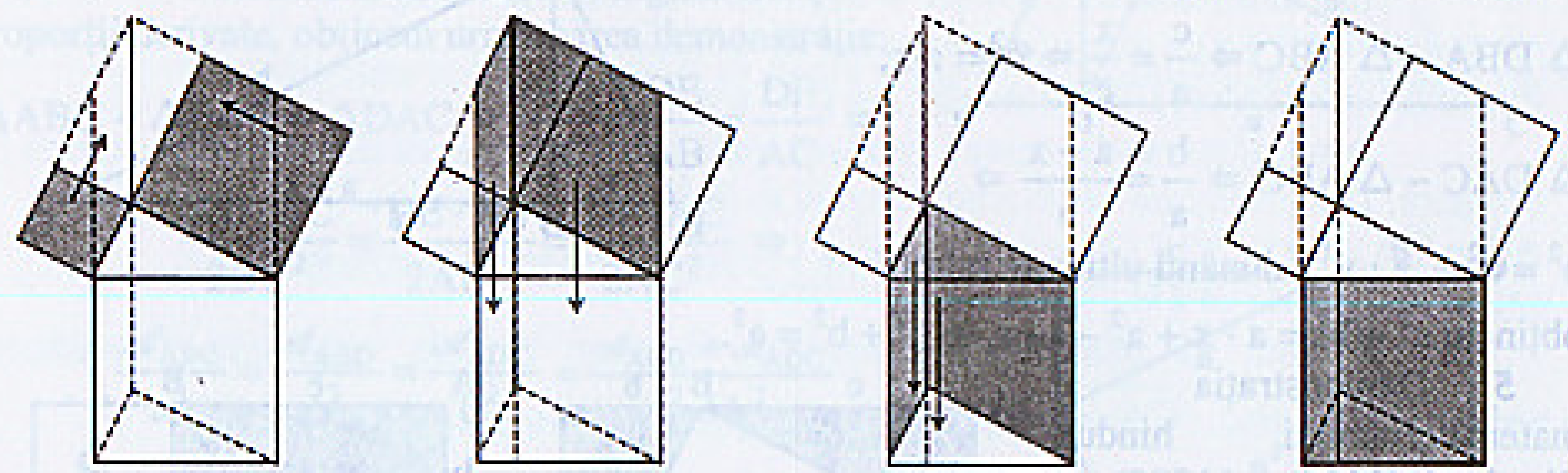
Uimirea este unul dintre cele mai eficiente instrumente ce ne stau la dispoziție pentru atragerea elevilor către matematică. Pentru a uimi elevii nu trebuie să scoatem întotdeauna „artileria grea". Acest simplu exercițiu este la fel de eficient, putând fi folosit în mod repetat din clasa a III-a, până în liceu. La început elevii pot exersa în acest exercițiu cele patru operații pe numere accesibile; apoi pe numere tot mai mari. În clasa a V-a pot primi sarcina de a-l aranja liniar folosind parantezele și ordinea efectuării operațiilor. Urmează verificarea exercițiului pe fracții (ordinare sau zecimale). În clasa a VI-a se pot face verificări pe numere negative, iar în a VII-a pe numere iraționale. În clasa a VIII-a, la operații cu fracții algebrice, elevii putea demonstra că rezultatul este 1 pentru orice număr. Prin verificarea pe ciudatele numere complexe le vom aminti ultima dată elevilor de acest simpatic exercițiu. ● ☺

R3LUARE

Demonstrații ale teoremei lui Pitagora

Această teoremă a fascinat matematicienii din toată lumea timp de 2500 ani. Mulți dintre aceștia au reușit să găsească demonstrații noi pentru marea teoremă. Unele surse vorbesc de 200 altele de 2000 de demonstrații diferite. Nu are nimeni pretenția să le învățăm pe toate, dar câteva tot merită cunoscute, mai ales că multe dintre acestea reprezintă exerciții de gândire deosebite. Pentru profesorii de matematică, dar și pentru elevii care îndrăgesc această materie, cunoașterea câtorva demonstrații ale teoremei lui Pitagora este obligatorie.

1. O primă demonstrație intuitivă se bazează pe forfecarea paralelogramelor, transformând suma pătratelor catetelor, printr-o succesiune de forfecări și translații, în pătratul ipotenuzei (vezi „predarea noțiunii de arie", în acest caiet la pagina 7).

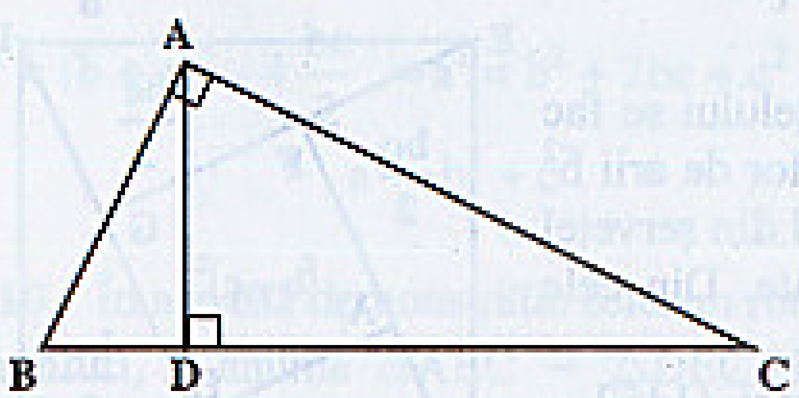


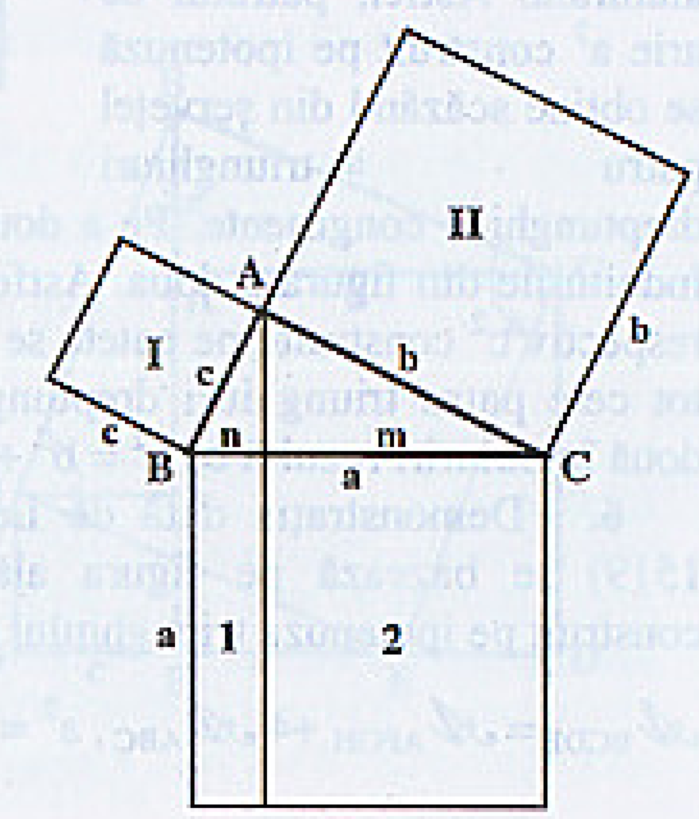
2. Următoarea demonstrație este atribuită lui Pitagora, folosind teorema catetei demonstrată prin asemănările $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ respectiv $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.

Astfel avem $AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = DC \cdot BC$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC =$

$= BC \cdot (BD + DC) = BC \cdot BC = BC^2$.

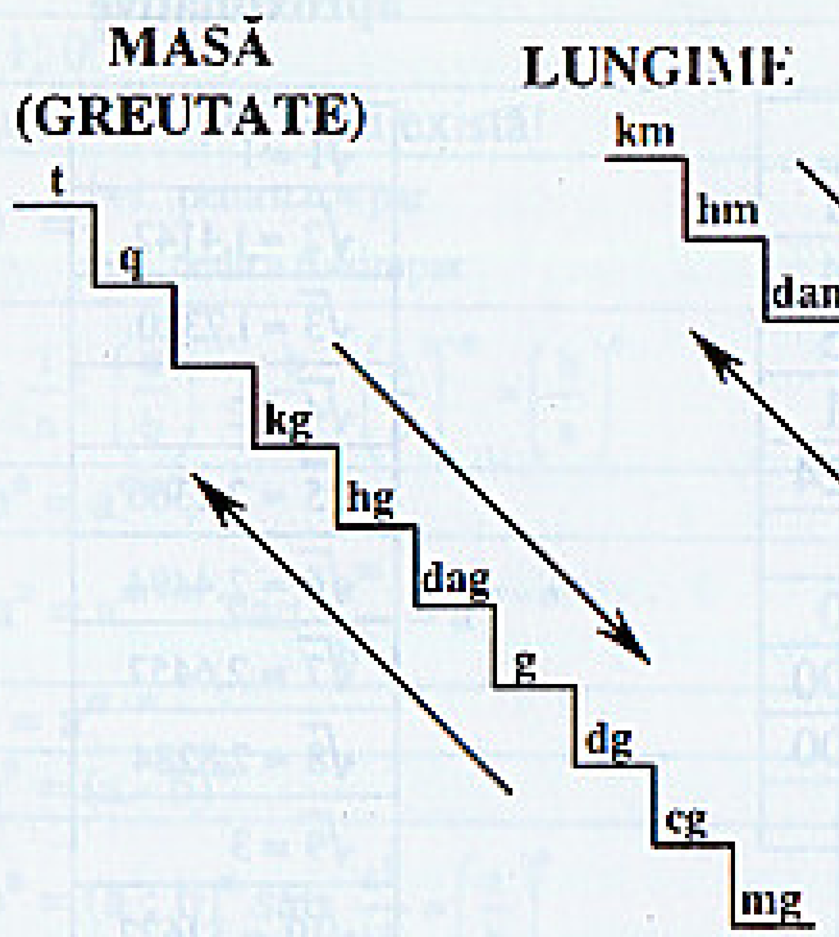


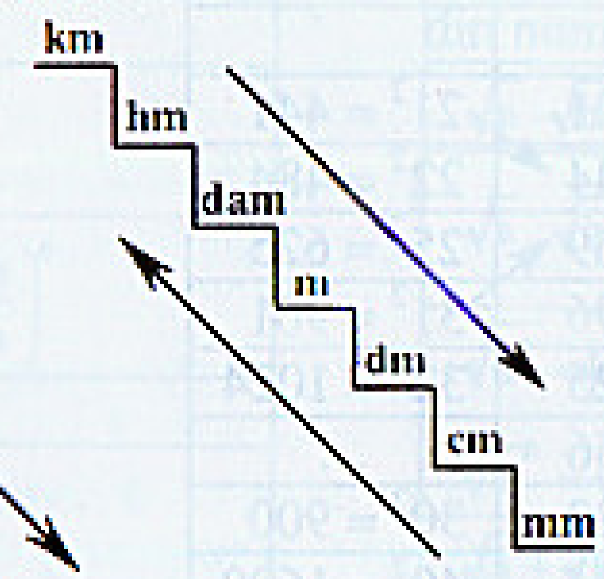


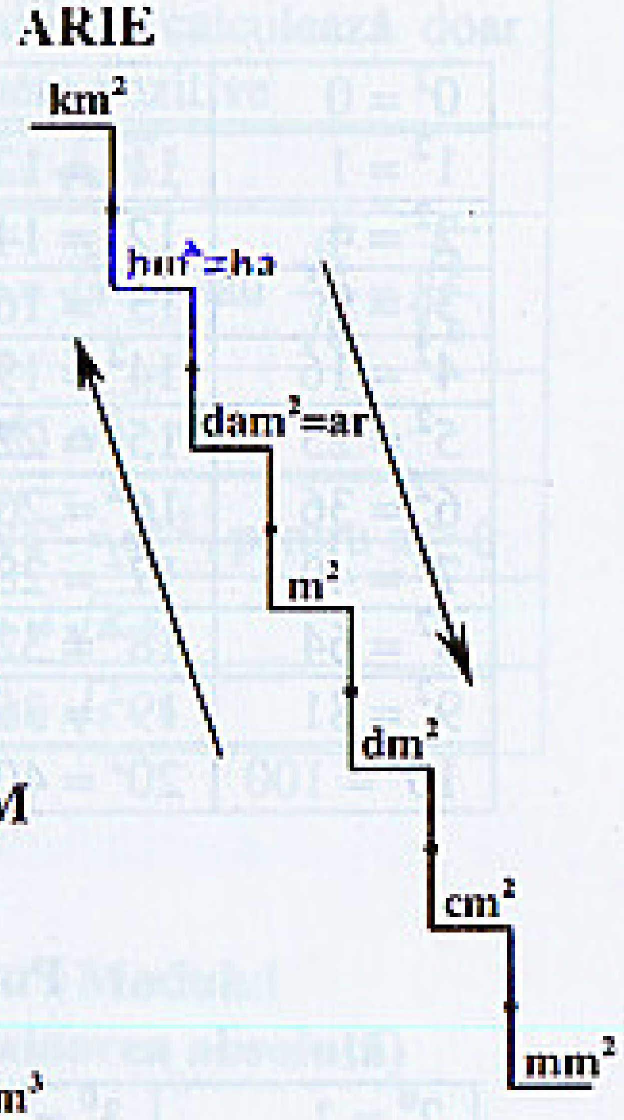
Această demonstrație poate fi evidențiată grafic prin următoarele egalități de arii: $c^2 = n \cdot a$ și $b^2 = m \cdot a \Rightarrow \mathcal{A}_I = \mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_{II} = \mathcal{A}_2 \Rightarrow$

$\mathcal{A}_I + \mathcal{A}_{II} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ deci $c^2 + b^2 = a^2$.

Unități de măsură

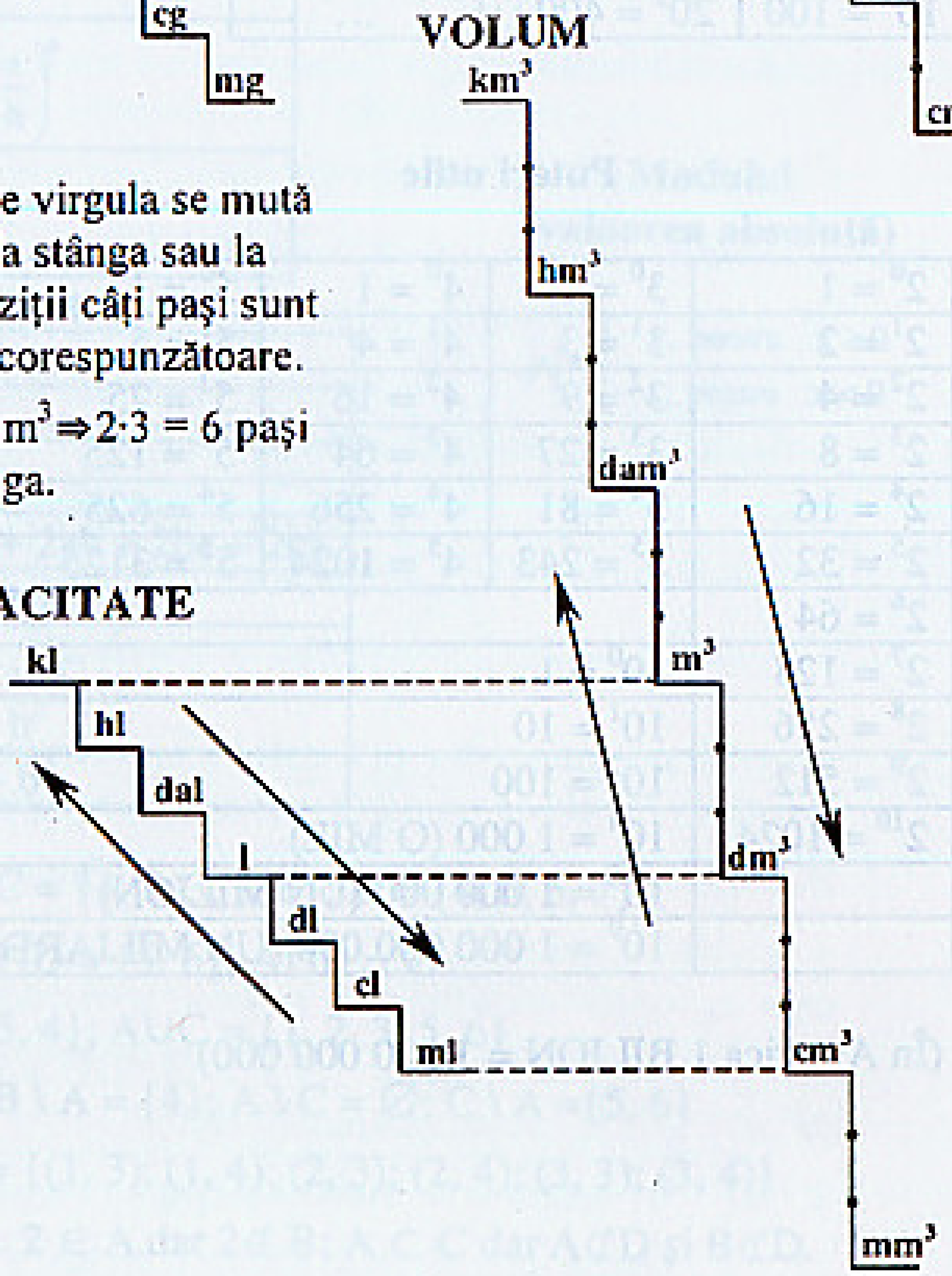




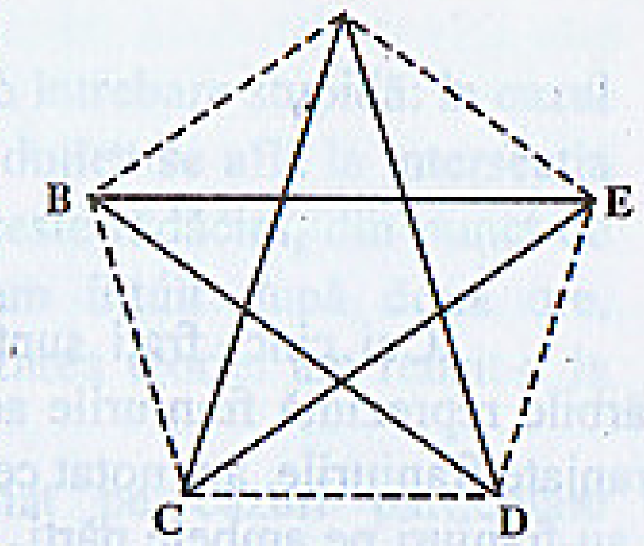


La orice transformare virgula se mută în sensul săgeții, la stânga sau la dreapta, cu atâtea poziții câți pași sunt de parcurs pe scara corespunzătoare.

De exemplu: $m^3 \to hm^3 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ pași la stânga.



Farmecul pentagramei

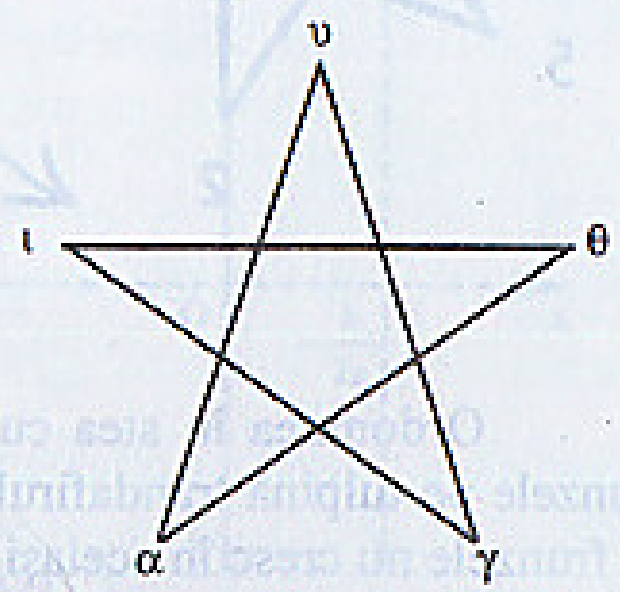


Misterioasa pentagramă, steaua în cinci colțuri, a atras din cele mai străvechi vremuri atenția învățaților. Aceasta se obține dacă unim din doi în doi cele cinci vârfuri ale unui pentagon, de obicei regulat. Astfel, în pentagonul ABCDE, obținem o pentagramă ACEBD. Practic, pentagrama este formată din cele cinci diagonale ale pentagonului. Observăm aici că pentagrama este singurul poligon stelat care epuizează toate diagonalele poligonului convex din care provine (deoarece toate diagonalele sunt de același tip). Totodată, se poate demonstra că pentagonul este singurul poligon care are numărul diagonalelor egal cu numărul laturilor. Pentru gimnaziu, această afirmație poate fi argumentată printr-un tabel de valori ale unei funcții $f: L \to D$, unde L este numărul de laturi, iar D numărul diagonalelor.

nr. laturi	3	4	5	6	7	8	9	10	etc.
nr. diagonale	0	2	5	9	14	20	27	35	etc.

În liceu demonstrăm astfel: numărul segmentelor determinate de n puncte distincte, oricare 3 necoliniare, este C_n^2. Numărul diagonalelor unui poligon cu n vârfuri este $d_n = C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2}$.

Condiția $d_n = n$, devine: $\frac{n^2-3n}{2} = n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n_1 = 0, n_2 = 5$, ultima fiind singura soluție posibilă.

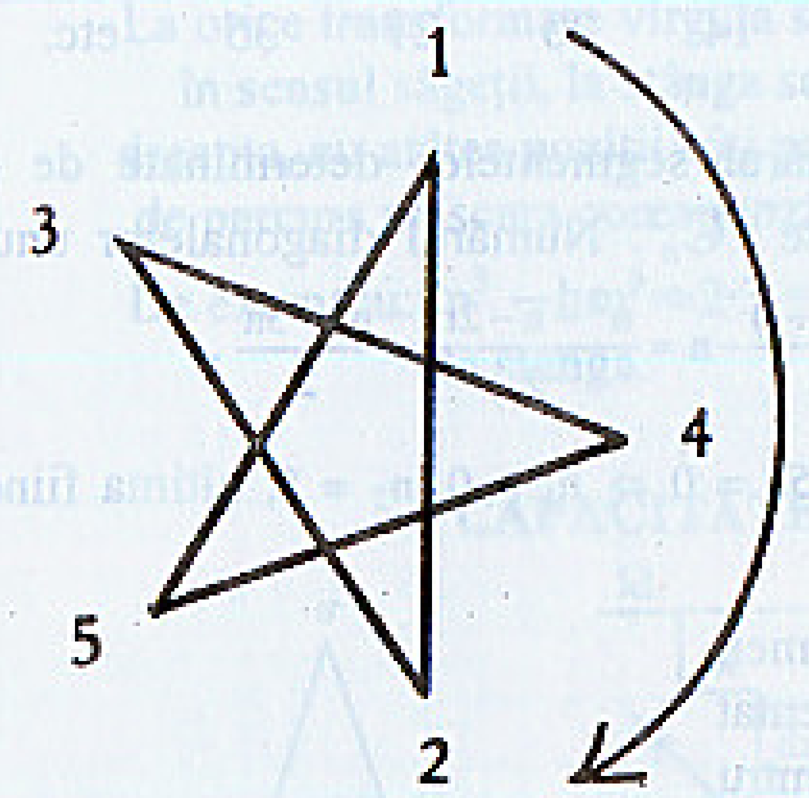


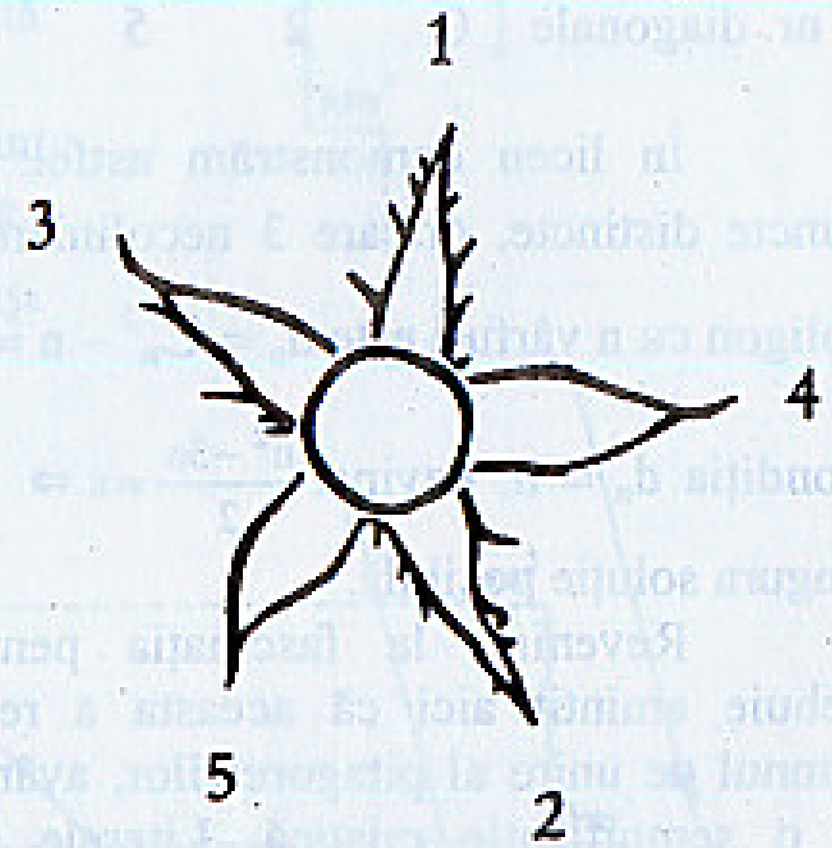
Revenind la fascinația pentagramei, trebuie amintit aici că aceasta a reprezentat semnul de unire al pitagoreicilor, având pentru ei o semnificație mistică. Literele scrise în vârful pentagramei formau cuvântul „υγιθα” (provine din cuvântul „υγιεια”, diftongul ει fiind înlocuit cu θ), corespunzând cuvântului salut, sănătate.

Putem și noi să cunoaștem admirația față de această minunată figură geometrică (ce lipsește din programa școlară), cercetând secretul trandafirilor. La mulți dintre aceștia vom putea observa clar că cele cinci sepale nu sunt la fel, ci, se pare, zimțate anapoda. Din evul mediu există câteva versuri legate de acestea. Iată o traducere aproximativă din latină:

Cinci frați sunt,
doi dintre ei bărboși,
doi născuți fără barbă,
Iar al cincilea
are barbă doar pe o parte.

Cei cinci frați sunt, desigur cele cinci sepale ale unui trandafir, iar bărbile reprezintă franjurile acestora. Pentru a înțelege legitatea după care sunt aranjate franjurile, am notat cele cinci sepale cu numere de la 1 la 5. Sepalele 1 și 2 au franjuri pe ambele părți, numărul 3 are franjuri doar pe o parte, iar sepalele 4 și 5 nu au deloc franjuri. Analizând prin comparație pentagrama și cele cinci sepale, observăm că sunt guvernate de aceeași lege, ordinea în care sunt parcurse corespunzând notării ACEBD de la început. Astfel, primele două sepale au franjuri, numărul 3 nu are franjuri în partea către numărul 1, unde sunt deja, iar ultimele două nu au deloc, fiind învecinate cu franjuri în ambele părți.





Ordonarea în stea cu cinci colțuri se păstrează și în modul cum cresc frunzele pe tulpina trandafirului, dar acest fapt este mai greu de observat pentru că frunzele nu cresc în același plan.

Bibliografie:

Gerbert Grohmann – Lesebuch der Pflanzenkunde, Freiburg 1956
Mihu Cerchez – Pitagora, Editura Academiei 1986

Reprezentarea conicelor în spațiul complex

Titus Grigorovici

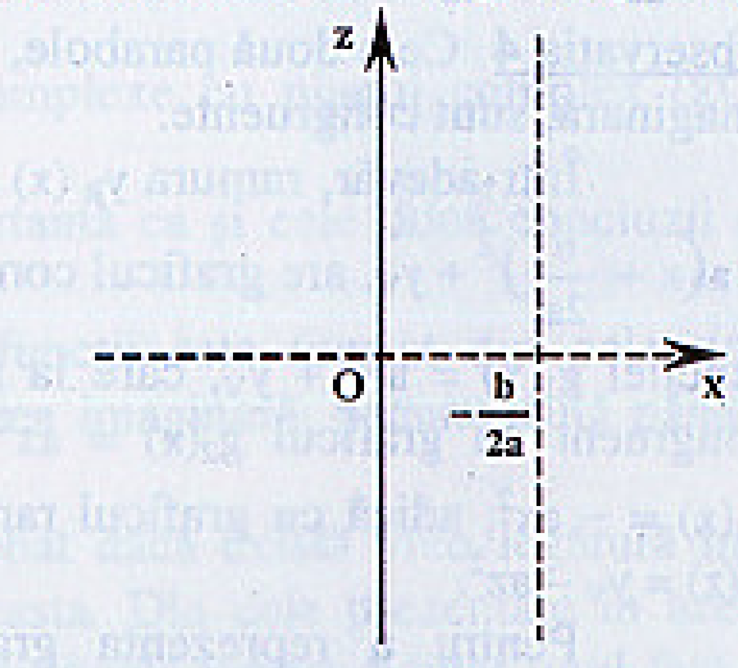
Totul a început în primăvara anului 1989 cu o întrebare stupidă: în cazul când $\Delta \geq 0$, rădăcinile reale ale funcției de gradul al doilea se află la intersecția parabolei cu axa absciselor; dar ce se întâmplă cu aceste rădăcini, din punct de vedere grafic, atunci când $\Delta \leq 0$? Răspunsul l-am intuit după două ore, demonstrația „am dat-o gata" în patru ani, iar finalizarea teoriei am reușit-o la începutul acestui an (2001).

În caietul P3NT4GON1A nr. 7 am studiat pe cazuri particulare reprezentarea parabolei, cât și a elipsei și a hiperbolei, în spațiul tridimensional complex. Astfel, am observat că orice elipsă reală are atașată o hiperbolă imaginară duală și invers. Parabola reală are atașată în acest spațiu tot o parabolă imaginară. În cele ce urmează vom studia cazul general al unei parabole, pe ecuația atașată funcției de gradul al doilea.

3. FORMA GENERALĂ A PARABOLEI

Fie ecuația $y = aX^2 + bX + c$, unde $X = x + iz$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (considerăm $a > 0$) și $x, y, z \in \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{C}$. Știm că există numere complexe $X = x + iz$ pentru care $y \in \mathbb{R}$. De pildă, în cazul $\Delta < 0$ soluțiile complexe ale ecuației $aX^2 + bX + c = 0$, ne furnizează un număr real ($y = 0$).

Pentru a reprezenta grafic parabola trebuie să căutăm toate perechile $(X; y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$, adică toate tripletele $(x; z; y) \in \mathbb{R}^3$, care verifică ecuația inițială în condițiile alese.



Atașăm funcția $y : D \to \mathbb{R}$,

$$y(X) = aX^2 + bX + c;$$

$$\begin{aligned} y(X) = y(x + iz) &= a(x + iz)^2 + b(x + iz) + c = \\ &= ax^2 - az^2 + 2axzi + bx + bzi + c = \\ &= ax^2 + bx + c - az^2 + iz(2ax + b). \end{aligned}$$

Deoarece $y \in \mathbb{R} \Rightarrow z(2ax + b) = 0 \Rightarrow$

$$z = 0 \text{ sau } x = -\frac{b}{2a}. \quad (1)$$

Dacă $z = 0 \Rightarrow X = x \in \mathbb{R}$, pe când,

dacă $z \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow X = -\frac{b}{2a} + iz$ cu $z \in \mathbb{R}$. Deci domeniul acestei funcții,

$$^{1}\quad D = \mathbb{R} \cup \left\{ -\frac{b}{2a} + iz \mid z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{C},$$

este format din două drepte perpendiculare (una dintre ele axa Ox) din planul complex.

Observația 1 Cu toate că $X = x + iz$; x și z nu variază concomitent deoarece trebuie îndeplinită condiția (1).

Observația 2 Funcția y are două ramuri, una reală pentru $z = 0$, și una imaginară pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

Astfel, dacă $z = 0 \Rightarrow X = x$ și avem ramura $y_R(x) = ax^2 + bx + c$, $y_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Graficul acestei ramuri este parabola arhicunoscută de ecuații $z = 0$ și $y = ax^2 + bx + c$.

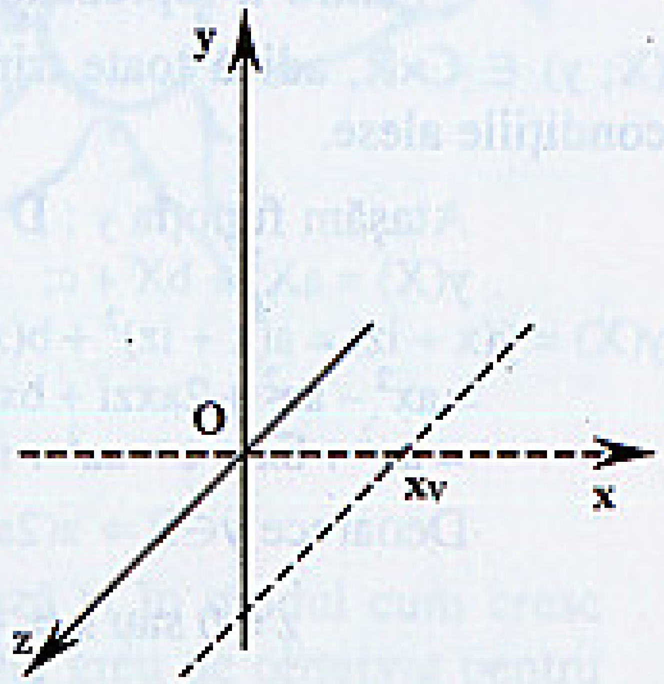
Dacă $z \neq 0$ și $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow X = -\frac{b}{2a} + iz$ avem ramura $y_I(z) = y_V - az^2$, $y_I : \left\{ -\frac{b}{2a} + iz \mid z \in \mathbb{R} \right\} \to \mathbb{R}$. Graficul acestei ramuri este o parabolă de ecuații $x = -\frac{b}{2a}$ și $y = y_V - az^2$. Într-adevăr, dacă $X = -\frac{b}{2a} + iz \Rightarrow$

$$y(X) = a\left(-\frac{b}{2a} + iz\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + iz\right) + c = \ldots = y_V - az^2.$$

Cele două parabole, cea reală și cea imaginară, formează împreună reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea. Să studiem această situație:

Observația 3 Funcția y este continuă, cele două parabole având vârful comun. $y_R\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = y_V = y_I(0)$.

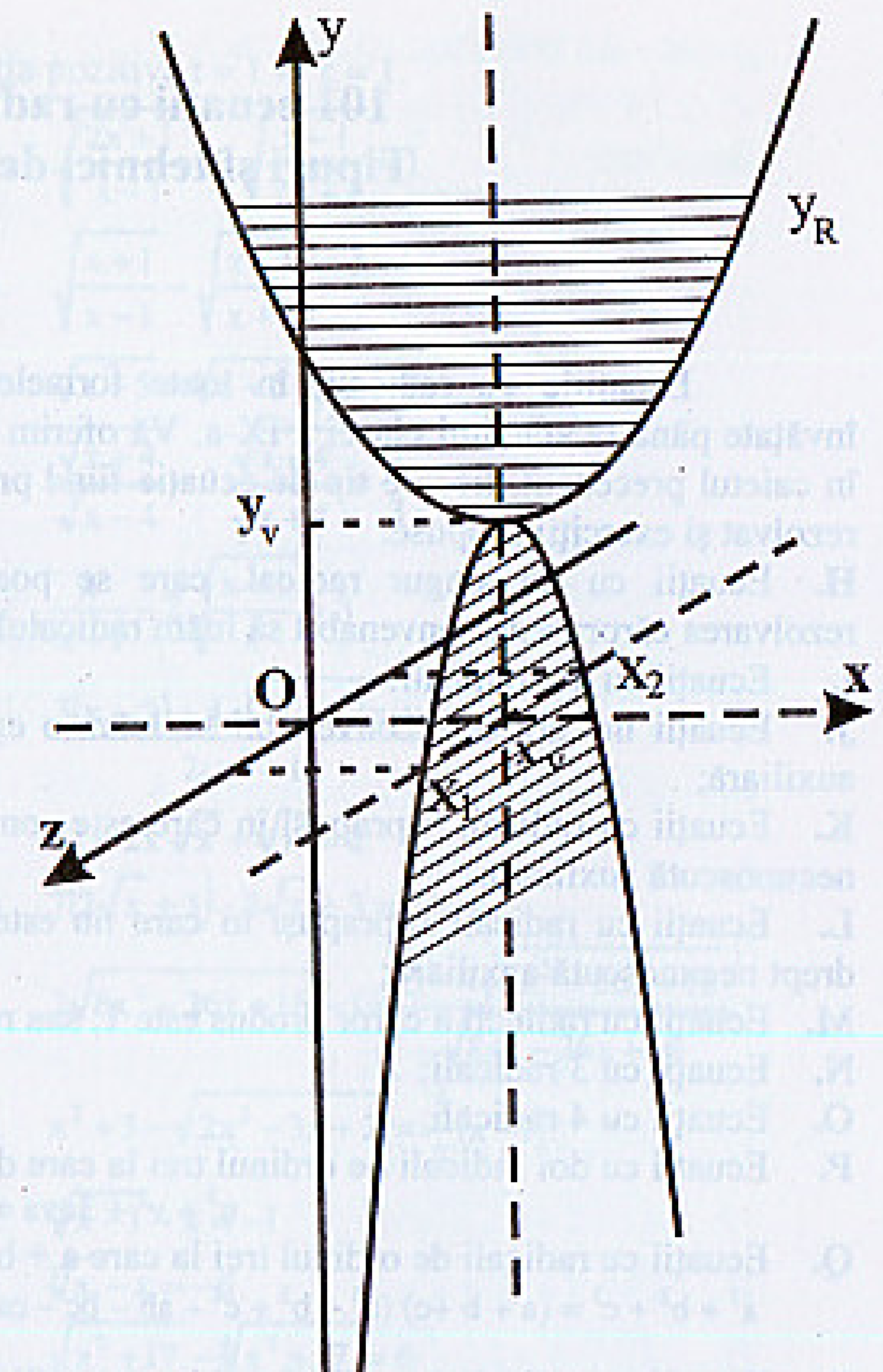
Observația 4 Cele două parabole, cea reală și cea imaginară, sunt congruente.



Într-adevăr, ramura $y_R(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_V$, are graficul congruent cu cel al funcției $g_1(x) = ax^2 + y_V$, care la rândul său este congruent cu graficul $g_2(x) = ax^2$ și cu graficul $g_3(x) = -ax^2$, adică cu graficul ramurii imaginare $y_I(z) = y_V - az^2$.

Pentru a reprezenta grafic cele două ramuri, am ales sistemul ortogonal de axe Oxyz cu axele reale Ox și Oy (versor 1) și axa imaginară Oz (versor i).

Astfel, y variază în funcție de $X = x + iz \in \mathbf{D}$ cuprins în planul complex (xOz).



În figura alăturată am reprezentat grafic cele două parabole în cazul când $\Delta < 0$ și $a > 0$. Vom numi parabola complexă, reprezentarea grafică formată din cele două parabole, cea reală din planul $z = 0$ și cea imaginară din planul $x = -\frac{b}{2a}$.

Observația 5 În cazul $\Delta < 0$ parabola complexă intersectează planul complex (xOz) în punctele $X_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. Într-adevăr, dacă $y = 0 \Leftrightarrow y_V - az^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{y_V}{a} = -\frac{\Delta}{4a^2}$. Deoarece $\Delta < 0 \Rightarrow$ $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ și $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ $X_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Ca răspuns la întrebarea inițială, concluzionăm că rădăcinile complexe ale funcției de gradul al doilea se găsesc la intersecția parabolei complexe cu planul complex (xOz) perpendicular pe axa Oy.

Întrebarea inițială nu este însă atât de importantă ca și cele două concluzii ale acestei teorii.

Concluzia 1: Graficul complet al acestei funcții este format din cele două parabole, cea reală cunoscută de oricine și cea imaginară, necunoscută până în acest moment.

Concluzia 2: Mulți matematicieni s-au întrebat dacă există vreo legătură între planul real și cel complex, și care ar fi aceasta. Din cele prezentate în aceste pagini se vede că aceste două plane sunt poziționate perpendicular unul față de celălalt. ☻ ☺