FLASH LA FIN4L

- De data asta chiar am trecut în mileniul III. Dintre cei care încercau să ne convingă acu' un an de chestia asta, unii tac, fie din bun simț, fie din convingere, alții au luat-o de la capăt. Și, apropos, nu s-a schimbat doar mileniul ci și secolul: am trecut din secolul XX în secolul XXL.
- B.U.G Mafia ne-au dat anul trecut o lecție interesantă de imaginație matematică: UN DOI ȘI TREI DE ZERO. Iată cum se poate citi anul 2000 cu ajutorul cifrelor 0; 1; 2 și 3. Iar Vili, care îi acompaniază sună chiar plăcut.
- Oare ce surprize matematice ne aduce anul 2001? Nu este nici pătrat perfect și nici număr prim. Următorul pătrat perfect este 2025, iar următorul număr prim 2003. Deocamdată am avut datele remarcabile 01. 01. 01 și 10. 02. 2001.
- Dodecaedrul regulat (corpul platonic cu 12 fețe pentagoane regulate) a fost marea vedetă a Festivității de închidere a Olimpiadei de la Sidney. Programa noastră neglijează total acest minunat corp, așa că, neștiind clar despre ce este vorba, comentatorul unui post renumit de televiziune l-a rebotezat Dodecagon. Aceasta este însă denumirea poligonului regulat cu 12 laturi.
- Buda medita într-o zi înconjurat de discipolii săi, plutind la 15 cm deasupra podelei. La un moment dat, coboară pe pământ, deschide încet ochii și se adresează discipolilor nerăbdători: „ $f(x) = ax^2 + bx + c$”. Nedumeriți discipolii întrebară: „Nu înțelegem nimic; ce vrei să spui?” Cu un aer de superioritate Buda le explică: „Normal că nu înțelegeți nimic, doar este o parabolă”.

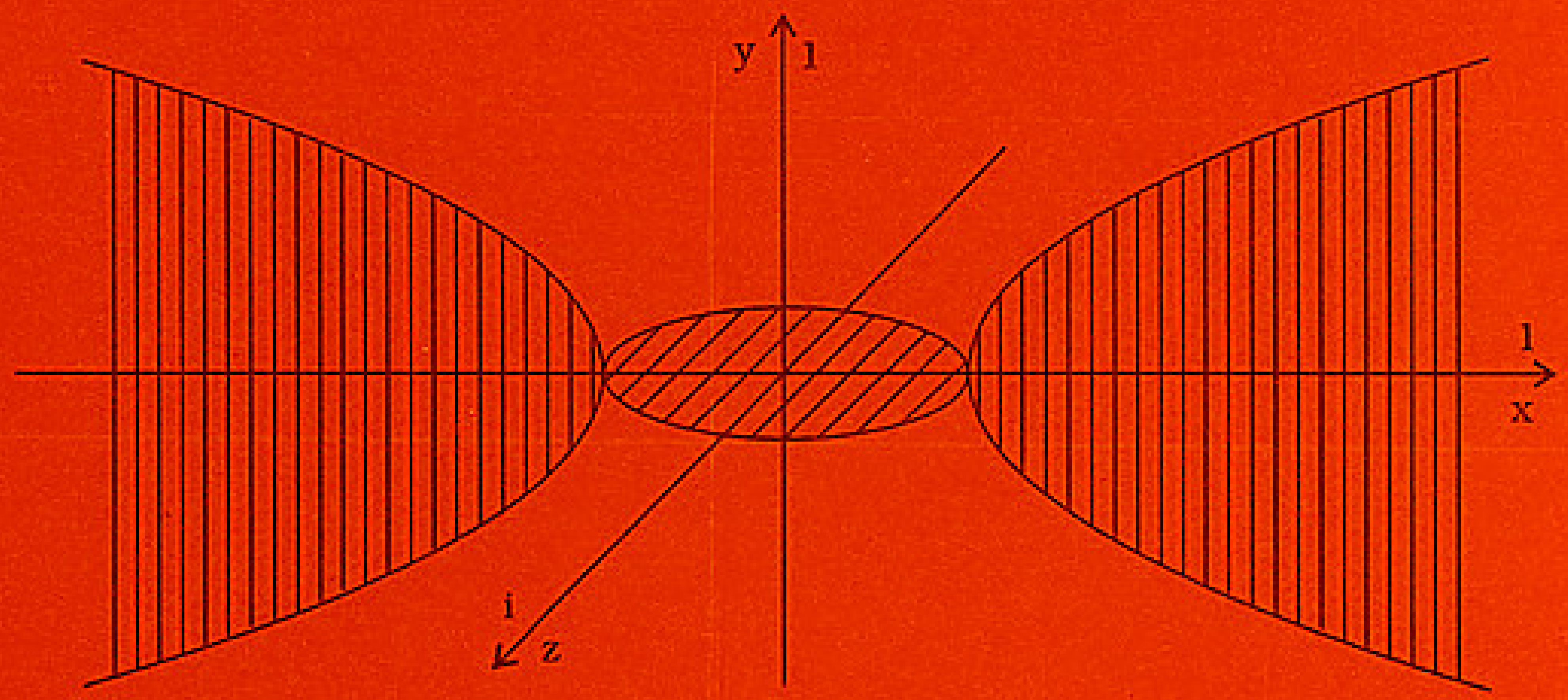
Editura TRIADE 2001
ISBN: 973-9196-75-9

CAIETE DE MATEMATICĂ

P3NT4GON1A

REDACTORI

MARIANA & TITUS GRIGOROVICI



REPREZENTAREA CONICELOR ÎN SPAȚIUL COMPLEX

FOTBALUL ȘI NUMĂRUL DE AUR

CEL MAI MIC MEMORATOR MATEMATIC CUNOSCUT

NUMĂRUL 7

MARTIE 2001

3 ani cu P3NT4GON1A

În ultimii doi ani Caietele de matematică P3NT4GON1A s-au transformat tot mai mult în culegere de probleme pentru pregătirea examenului de capacitate. Între timp piaţa a fost efectiv invadată de lucrări conţinând teste recapitulative sau culegeri de exerciţii şi probleme.

În acest sens, am dori să evidenţiem lucrarea „Ghid de pregătire pentru examenul de capacitate şi admitere în liceu" a profesorilor Teodor Poenaru şi Oana Cărbune, apărută la Editura Dacia. Volumul I, ce ne oferă o extraordinară recapitulare a tot ceea ce poate fi strâns sub umbrela aritmeticii din gimnaziu, este o lucrare de referinţă, obligatorie pentru orice elev ce se respectă.

Sprijinul nostru în această direcţie nemaifiind necesar, după Suplimentul - Culegere din toamna lui 2000, Caietele de matematică P3NT4GON1A revin la forma iniţială, unică pe piaţa publicaţiilor de matematică româneşti. Astfel, articolele metodice vor fi din nou majoritare, în detrimentul zonei cu exerciţii şi probleme. Din partea tuturor profesorilor care îşi doresc această publicaţie, aşteptăm în schimb vânzări sănătoase care să susţină în continuare, din punct de vedere financiar, apariţia caietelor P3NT4GON1A.

Deşi preocupările noastre vor rămâne centrate pe gimnaziu, vom avea tot mai multe incursiuni şi în materia de liceu. În acest sens, pornim în caietul de faţă o serie de lecţii despre pentagonul regulat. Totodată, la cererea multor profesori, vom relua temele cele mai reuşite din caietele precedente. Rubrici noi, cum ar fi „Prezentare de carte" sau „D-ale profesorilor" vor întregi caietele.

Deşi de la apariţia Numărului 6 al caietelor P3NT4GON1A a trecut un an, noi nu am stat degeaba. Pe lângă Suplimentul „Culegere de probleme şi exerciţii de matematică pentru gimnaziu", ce a depăşit toate tirajele precedente, am organizat în toamnă şi a doua ediţie a Concursului de matematică P3NT4GON1A. Despre acest concurs, care „a crescut într-un an cât alţii în zece", găsiţi amănunte în paginile acestui caiet.

Nu putem încheia înainte de a anunţa, cu adâncă durere în suflet plecarea dintre noi la vârsta de 71 ani, a tatălui şi bunului nostru prieten Dodu Eugen. Deşi de profesie inginer constructor, matematica a fost pasiunea vieţii sale. În clasa a XII-a a fost al doilea pe ţară la concursul rezolvitorilor din Gazeta Matematică. Nefiind îngrădit de manuale şi autorităţi a păstrat şi a practicat până la sfârşit o matematică atractivă, plină de savoare. Pentru P3NT4GON1A a fost un ajutor de încredere oferindu-ne materiale valoroase adunate de-o viaţă. De la el ştim minunate şi spectaculoase probleme cum ar fi: problema sârmei pe Ecuator, dilema cerşetorului sau problema lui 1089. Până în ultimele ore înainte de a cădea la pat a strâns materiale pentru setul de „101 ecuaţii cu radicali". Bucuria şi pasiunea cu care a făcut matematică va rămâne pentru totdeauna în sufletele celor ce l-au cunoscut şi l-au avut ca dascăl.

Titus Grigorovici

Concursul de matematică P3NT4GON1A

În data de 28 Octombrie 2000 a avut loc a II-a ediţie a Concursului de matematică P3NT4G01A. Gazdă minunată a fost în acest an Şcoala Nr. 7; conducerea şcolii, catedra de matematică şi personalul şcolii creând condiţii ideale pentru desfăşurarea concursului. La sfârşitul unei zile de lucru intens, participanţii, atât profesorii cât şi elevii au simţit satisfacţia unui lucru bine făcut, din care toată lumea a avut numai de învăţat.

La concurs s-au înscris 21 de echipaje (103 elevi de clasa a VIII-a) din 14 şcoli: Şcoala Nr. 21; Şcoala Nr. 22; Şcoala Eugen A. Pora; Şcoala Al. Vlahuţă; Şcoala Emil Bob; Şcoala Sf. Andrei; Liceul Gh. Bariţiu; Liceul Bathory; Liceul Waldorf; Liceul L. Blaga; Şcoala Nr. 7; Colegiul tehnic de construcţii Anghel Saligny; Liceul N. Bălcescu; din Cluj şi Liceul Andrei Şaguna din Turda.

Concursul a avut două secţiuni. La individual au fost premiaţi următorii elevi: Locul I: Vlad Bibola – Şcoala Emil Bob (9,60); Locul al II-lea: Irina Luludachi; Ionuţ Gherle – Liceul L. Blaga şi Paul Crăciunaş – Şcoala Eugen Pora (9,00); Locul al III-lea: Àgnes Sebestyén-Pál – Liceul Bathory şi Dan Poenaru – Liceul N. Bălcescu (8,80). La concursul pe echipe au fost premiate următoarele echipaje: Locul I: Şcoala Nr. 21 (prof. Mihaela Mihuţ) – 81p; Locul al II-lea: Şcoala Ioan Bob (prof. Maria Măcelaru); Colegiul Tehnic de Construcţii Anghel Saligny (prof. Simona Vancea); Liceul N. Bălcescu (prof. Oana Cărbune) – 78 p; Locul al III-lea: Şcoala Nr. 21 (prof. Mihaela Mihuţ); Şcoala E. A. Pora (prof. Mariana Grigorovici)

CUPRINS

Caietele de matematică P3NT4GON1A
Avizate de Direcţia Generală a Învăţământului Preuniversitar
TITUS GRIGOROVICI – redactor coordonator
MARIANA GRIGOROVICI – redactor şi tehnoredactor
Caiet de matematică P3NT4GON1A - Nr. 7, ISBN – 973 – 9196 – 75 – 9
EDITURA TRIADE – C.P. – 1 – 400, 3400 CLUJ – NAPOCA
Tipărit la TIPOGRAFIA PRINTEK, CLUJ – NAPOCA, tel. 092-744932
Comenzi la tel. 098-601275

Succesul extraordinar de care s-a bucurat acest concurs se datorează în primul rând regulamentului şi principiilor sănătoase de care am ţinut cont.

Regulament

Art 1. Concursul de matematică P3NT4GON1A se adresează elevilor de clasa a VIII-a.

Art 2. Materia cerută este cea din clasele V – VII, cuprinsă în programa pentru examenul de capacitate. Nivelul subiectelor nu trebuie să depăşească nivelul de dificultate al celor mai grele exerciţii sau probleme de la examenul de capacitate.

Art 3. La concurs se pot înscrie echipaje de câte 5 elevi însoţite de un profesor corector.

Art 4. Concursul are două probe, una individuală şi una pe echipe. Timpul de lucru la fiecare probă este de câte 90 minute.

Art 5. Concursul de matematică P3NT4GON1A este organizat de Redacţia Caietelor de matematică P3NT4GON1A în colaborare cu profesorii de matematică ai unei şcoli. Au prioritate la organizarea concursului şcolile care au participat la ediţiile precedente.

Art 6. Elevii înscrişi în concurs plătesc o taxă de participare. Din sumele strânse organizăm un bufet rece pentru profesorii corectori cât şi o gustare pentru elevi în pauza dintre cele două probe. Tot din aceste sume se vor achiziţiona premii pentru primele locuri.

Art 7. Profesorii organizatori, cei supraveghetori şi corectori nu sunt retribuiţi pentru activitatea lor în cadrul acestui concurs.

Principii

P1. Concursul P3NT4GON1A este destinat elevilor. Profesorii trebuie să lase orice ambiţii personale de-o parte şi să creeze condiţii ca elevii să se întreacă prin propriile forţe într-un concurs cinstit.

P2. Concursul P3NT4GON1A reprezintă o alternativă la concursurile şcolare oficiale. Olimpiadele de matematică au ajuns la un grad de dificultate atât de ridicat, încât chiar şi dintre copiii cu înclinaţii matematice evidente, puţini mai fac faţă, majoritatea întorcându-se cu note mici şi decepţionaţi de la concurs. Pentru a evita această decepţie mulţi profesori îi „îndoapă" efectiv cu probleme grele pe săracii elevi, unii parcurgând chiar în avans materia pentru a fi „mai pregătiţi" în vederea olimpiadei.

Măsura cea mai logică ar fi însă ca exerciţiile şi problemele date la concurs să coboare la un nivel accesibil elevilor. Subiectele trebuie astfel concepute încât elevii buni să nu coboare sub nota 5, pentru a le fi încurajată munca şi pasiunea. Concursul trebuie să le aducă bucurie şi nu deprimare.

P3. La începutul clasei a VIII-a este timpul să fie luată în serios pregătirea ordonată pentru examen. Mobilizarea pentru această pregătire poate fi făcută cu succes printr-un concurs interşcolar.

P4. La sfârşitul clasei a VII-a sau începutul clasei a VIII-a se observă la foarte mulţi elevi un moment de deşteptare, aceştia începând să cuprindă şi să înţeleagă într-adevăr matematica. Acest moment de trezire matematică poate apărea doar după ce copilul trece din stadiul operaţiilor concrete la stadiul operaţiilor propoziţionale, fiind capabil să raţioneze asupra propoziţiilor sau enunţurilor verbale ca atare. Psihologii situează acest moment în jurul vârstei de 14 ani (vezi „Introducere în psihologia contemporană", I. Radu, M. Miclea şi alţii, editura Sincron Cluj-Napoca, 1991). Geometria plană, de exemplu, poate fi savurată cu adevărat de către elevi doar după cunoaşterea ei integrală şi stăpânirea gândirii cauzale, adică după finalul clasei a VII-a. La mulţi elevi se observă după acest moment, situat în jurul vârstei de 14 ani, o adevărată trezire în privinţa geometriei.

P5. Un alt motiv în alegerea momentului de desfăşurare a acestui concurs este următorul: lăsând o perioadă de uitare după clasa a VII-a, în vacanţa mare, odată recapitulată materia la începutul clasei a VIII-a, cunoştinţele revin cu o forţă mult crescută. Luna octombrie din clasa a VIII-a este potrivită astfel unei prime încercări a forţelor matematice.

P6. În ultimii 10 ani cerşitul în toate formele sale a ajuns să domine mentalitatea noastră. La început transporturile umanitare, mai târziu donaţiile şi sponsorizările ne-au obişnuit să primim totul degeaba. Prin stabilirea unei taxe de participare la concursul nostru, dorim să ajutăm elevii a se debarasa de acest obicei dăunător.

P7. Pe lângă concursul individual, elevii vor participa din acest an şi la o probă pe echipe. Justificarea acesteia este următoarea: testările individuale, ce domină multe discipline şcolare, educă indirect elevii spre egoism. Spiritul de echipă şi arta colaborării în grup sunt educate doar prin sporturile de echipă sau activităţi muzicale (coruri, orchestre sau ansambluri de dans). La acestea sunt esenţiale coordonarea în echipă, completarea reciprocă şi educarea simţului pentru cel de alături. Prin proba pe echipe dorim să oferim şi elevilor pasionaţi de matematică şansa de a-şi dezvolta aceste importante calităţi.

Subiecte – proba individuală

PARTEA I

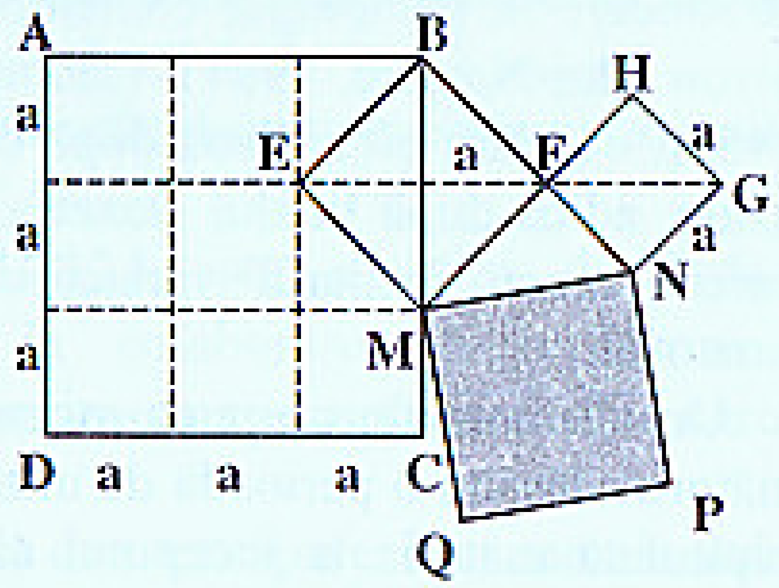
1. Un biscuit are pe lungime 16 dinți iar pe lățime 12 dinți. Biscuitul are în total .... dinți.

2. M, N, P și Q sunt mijloacele laturilor patrulaterului convex ABCD. Ce condiție trebuie să îndeplinească patrulaterul ABCD pentru ca MNPQ să fie pătrat?..

3. $\{31440+1040:[150-2400:(67+53)]\cdot 20\}:395+1001=$ ......

4. De câte ori intră, ca arie, pătratul MNPQ în pătratul ABCD din figura alăturată? (BEMF și FHGN sunt pătrate).

....



PARTEA a II-a

5. Numărul $p = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{11}$.

Arătați că $p \vdots 13$.

6. O țărancă vine la piață să vândă ouă.

Primului client îi vinde o jumătate din total și încă o jumătate de ou; celui de-al doilea client îi vinde o treime din total și încă o treime de ou. Câte ouă a avut la început dacă i-au mai rămas 7 ouă?

7. Patrulaterul ABCD are măsurile unghiurilor proporționale cu numerele 3; 5; 7 și 15. Arătați că acest patrulater este triunghi.

8. ABCD este un trapez cu bazele AB = a și CD = b (a > b) iar AD⊥BC. M și N fiind mijloacele bazelor, găsiți lungimea segmentului [MN] în funcție de a și b.

9. Fie ABCD un patrulater ortodiagonal (AC⊥BD).

a) Arătați că aria sa este egală cu semiprodusul diagonalelor.

b) Cunoscând AD = 60 cm, BC = 25 cm, OD = 36 cm și OB = 20 cm, O fiind intersecția diagonalelor, calculați lungimile laturilor și ale diagonalelor.

c) Calculați perimetrul și aria patrulaterului ABCD.

Subiecte – proba pe echipe

1. Calculați: $\sqrt{\dfrac{2}{0{,}0(5)}}+\sqrt{\dfrac{22}{0{,}0(05)}}+\sqrt{\dfrac{222}{0{,}0(005)}}$
2. Ce unghi formează acele ceasornicului la ora 5 și 10 minute?
3. Problema lui 1089 (vezi pagina următoare).

4. Rezolvați sistemul: $\begin{cases}(x-1)(x+1)+(y-2)^2 = x(x-1)+y^2\\ (x+2)^2+(y-1)(y+1)=(x-y)^2+2xy+y\end{cases}$

5. Prin punctul P desenăm cu o monedă trei cercuri care se intersectează două câte două încă o dată în punctele A, B și respectiv C. Arătați că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu celelalte trei cercuri. (Problema cu „moneda de 3 lei a lui Țițeica")

Problema lui 1089

Fie un număr de trei cifre diferite, de exemplu 375. Luăm răsturnatul său 573 și le scădem. Obținem 198. Pe acesta îl adunăm cu răsturnatul său, adică cu 891 și obținem 1089. Arătați că pentru orice număr natural din trei cifre diferite, ales inițial, efectuând calculele după modelul de mai sus, se obține în final același rezultat 1089.

(Observație: în unele cazuri la scădere se obține rezultatul 99, adică cifra sutelor 0. Considerăm răsturnatul său 990, pentru a se păstra rezultatul final).

Rezolvare: Fie numărul inițial $\overline{abc}$ și răsturnatul său $\overline{cba}$. Presupunem că $a > c$. Pentru $c > a$ se procedează analog. Iată, în continuare, cele două operații din problemă:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & & \\ a & b & c & - \\ c & b & a & \\ \hline (a-1-c) & 9 & (10+c-a) & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cancel{1} & & & \\ (\cancel{a}-\cancel{1}-\cancel{c}) & 9 & (10+\cancel{c}-\cancel{a}) & + \\ (10+\cancel{c}-\cancel{a}) & 9 & (\cancel{a}-1-\cancel{c}) & \\ \hline 10 & 8 & 9 & \end{array}$$

*

Din când în când ne putem permite să facem spectacol în ora de matematică. Îi mai atragem pe copii către această disciplină devenită, din păcate mult prea aridă. De exemplu, putem lua această problemă în prima oră de după vacanță. Un elev de încredere va face calculele la tablă, profesorul stă cu spatele la tablă ca să nu vadă ce număr a ales elevul, iar clasa urmărește corectitudinea calculului. La sfârșit, profesorul, care a stat tot timpul cu spatele, dă, spre uimirea generală, rezultatul 1089.

La clasele mici (V, VI) este sănătos să lăsăm elevii în această uimire. Nu este bine să mai luăm încă un exemplu sau să dăm demonstrația. Doar după apariția gândirii cauzale la elevi, adică în clasele a VII-a sau a VIII-a, se poate face și demonstrația problemei. Iar dacă acest pas este sugerat chiar de către un elev („la orice număr dă așa"), cu atât mai bine. ☻ ☺

D-ALE PROFE5ORILOR

Olimpiada de dragul olimpiadei

„Nu cunosc să existe o olimpiadă intergalactică de matematică, dar dacă s-ar ivi ocazia, sunt sigur că românii ar fi primii care s-ar oferi să o organizeze"

Emil Constantinescu

Olimpiada internațională de matematică este o invenție românească din perioada comunistă. Primele două ediții au fost organizate de către România (București și Brașov în 1959, respectiv București și Sinaia în 1960). Ține de stilul nostru de matematică. Pentru că trebuie recunoscut, suntem cei mai buni în lume la probleme și exerciții de matematică. Nivelul atins în acest sens la noi în țară este mult superior față de tot ce se practică în școlile din străinătate. Problemele și exercițiile au devenit pentru noi un scop în sine. Așa cum nemții fac cele mai bune mașini, francezii cele mai bune vinuri, japonezii cele mai bune electronice și americanii cele mai bine vândute filme, tot așa suntem noi primii la exerciții de matematică. Problema noastră, ca țară, este că acestea nu pot fi exportate pe bani serioși, pentru că nimeni nu folosește în vest așa ceva, iar specialiștii de vârf produși de învățământul nostru pleacă în țările dezvoltate, pe gratis, imediat ce au terminat școala.

Olimpiada internațională de matematică a avut însă și un important aspect politic. Comuniștii au folosit în general toate olimpiadele ca instrumente de demonstrat superioritatea acestui sistem, față de cel capitalist. Olimpiada de matematică le-a întrecut însă cu mult pe cele sportive, fiind în sine o invenție comunistă. Este de ajuns să amintim că la primele opt ediții (1959 – 1966) au participat doar țări din blocul comunist (Bulgaria, Cehoslovacia, R.D.G., Polonia, România, Ungaria, U.R.S.S. și Vietnam), iar de-abia a optsprezecea olimpiadă, în 1976, a fost găzduită de o țară necomunistă (Austria).

În afară de politica externă, olimpiadele de matematică au avut și un important rol de asuprire psihică a profesorilor. Regimurile comuniste obișnuiau să ceară tuturor depășirea planului și producții record. Nemaiexistând interesul personal specific economiei private, regimul avea nevoie de o metodă de impulsionare a producției. Pe lângă această necesitate firească, comunismul avea nevoie de metode eficiente de dominare a maselor. Iată cum reușeau să stăpânească o țară întreagă: chiar dacă planul nu putea fi întotdeauna realizat sau depășit nu era nici o problemă, pentru că oamenii se simțeau vinovați, vulnerabili la critici și atacuri „de sus". Ori, o persoană care se simte „cu musca pe căciulă", este mulțumită dacă este lăsată în pace, nu ridică pretenții și este docilă. Exact ceea ce aveau nevoie conducătorii țării. Nici profesorii nu au scăpat de această asuprire. Conducerile inspectoratelor și ale școlilor erau într-o continuă goană după rezultatele la olimpiade. Un profesor care nu avea astfel de rezultate, era considerat total inferior unuia cu rezultate. Iar, în cazul unei reduceri de post, dintre un profesor cu experiență, de la care elevii înțeleg lecțiile, și un profesor tânăr neîndrăgit de clase, dar care a prins un elev foarte bun și l-a îndopat cu materie, parcurgând manualele și culegerile cu doi ani înainte, obținând astfel rezultate la „Națională", dintre aceștia doi este dat afară primul profesor. Tragedia este că, în comparație cu celelalte domenii de activitate, învățământul nostru nu a scăpat de această nebunie nici după 1990. Profesorii sunt și acum criticați și ridiculizați dacă nu au rezultate la olimpiade.

Să nu fiu greșit înțeles: **nu sunt împotriva concursurilor școlare, ci împotriva nivelului absurd la care au ajuns acestea la noi.** Și în trecut se organizau concursuri de matematică dar acestea s-au transformat actualmente într-o obsesie a învățământului nostru. Și în vest există concursuri, dar acolo elevii nu sunt îndopați ca la noi cu probleme și exerciții. La ei concursul este al elevilor, pe când la noi este al profesorilor. La noi elevul este un instrument cu ajutorul căruia profesorul își poate demonstra capacitățile sale. La ei profesorul oferă asistență și bibliografie, dar elevul este cel care stabilește ritmul și cantitatea de muncă. În timp ce în sport dopajul este interzis, în matematica noastră acesta este chiar încurajat oficial și premiat.

Elevii noștri sunt efectiv dopați matematic doar pentru a aduce rezultate olimpice profesorilor, școlilor și județului. Iar ambițiile multor profesori sunt de nestăvilit. Mândria de a face parte dintr-un sistem „atât de performant" („Elevii noștri ocupă întotdeauna primele locuri la olimpiadele internaționale"), această mândrie acționează ca o beție, luându-le mințile. Problemele oferite la concursuri sunt tot mai grele. La o olimpiadă națională, în urmă cu vre-o doi ani, a existat chiar un pariu între profesorii ce au propus problemele: „ Pe pariu că problema mea nu o rezolvă nimeni!" Rezultatul a fost cel normal în astfel de condiții: elevii cei mai buni din țară nu au putut rezolva nimic, ieșind dărâmați de la concurs. Uneori mă gândesc că ar trebui organizată o olimpiadă de matematică pentru profesori. Mai ales că cei mai mulți nu au avut în copilărie rezultate deosebite la olimpiade. Poate asta i-ar calma. ☻ ☺

Titus Grigorovici, 25 iulie 2000

PRE2ENTARE DE CAR7E

Simon Singh – Marea Teoremă a lui Fermat

Povestea unei enigme care a contrariat cele mai luminate minți ale lumii vreme de 358 de ani.

Editura HUMANITAS, ed. a 2-a, 2000

„ Știai ", mărturisi Diavolul, „ că nici cei mai buni matematicieni de pe alte planete – la mare distanță de Pământ – n-au reușit s-o dezlege ? Păi, e unul pe Saturn – seamănă oarecum cu o ciupercă pe catalige – care rezolvă în minte ecuații cu derivate parțiale; și până și el s-a dat bătut."

(Arthur Pogues, *Diavolul și Simon Flagg*)

Noi, profesorii de matematică, atunci când scriem o carte sau chiar și un simplu articol, ne simțim datori să fim cât mai riguroși și seci. Așa suntem noi, ne obligă tradiția pe care vrem să o și depășim. Este greu de găsit un matematician care să nu scrie sec dar foarte riguros. Fiecare vrea să arate cât de bine stăpânește această "artă", cât este de tare. Majoritatea matematicienilor suferă de acest „sindrom al rigurozității excesive" (S. R. E.). Cărțile de matematică în care nu deranjează S. R. E. sunt de obicei cele care nu sunt scrise de matematicieni. O astfel de carte ne este oferită de Editura Humanitas. Este vorba de lucrarea lui Simon Singh, „Marea teoremă a lui Fermat". Departe de a fi un dezavantaj, această postură i-a permis autorului o atitudine liberă și lejeră față de temele abordate, atitudine ce ar trebui să reprezinte un exemplu pentru profesori: elevii noștri nu sunt încă matematicieni, iar atragerea lor spre această disciplină trebuie făcută prin fantezie și elemente senzaționale, nu prin rigurozitatea dusă la extrem.

Pe piața românească, cartea lui Simon Singh aduce și alte noutăți. Între nenumăratele culegeri de exerciții și probleme, și tot atâtea manuale și lucrări ce sintetizează materia, iată în sfârșit o carte despre matematică, despre frumusețea dar și despre ciudățeniile acestei discipline, despre matematicieni și despre viața lor. O altă noutate ar fi că „Marea Teoremă a lui Fermat" este o carte accesibilă chiar și elevilor de liceu. „Demonstrația" curge într-o lectură plăcută până la un nivel de cultură generală, unanim acceptat. Partea cea mai dură a demonstrației lipsește, pentru că, așa cum ne explică autorul, există în lume doar câțiva matematicieni ce o pot înțelege. Sigur că pe la noi s-au găsit profesori decepționați de lipsa mult așteptatei demonstrații. Acestora le sugerez să studieze *Annals of Mathematics*.

Pentru majoritatea, matematicienilor din România, nici nu este atât de importantă demonstrația respectivă. Simon Singh ne oferă ceva mult mai valoros: o istorie a matematicii, din antichitate până în vremurile noastre, scrisă într-un mod accesibil și atractiv. Pentru profesorul de matematică, bombardat zilnic de noi culegeri sau manuale, cartea oferită de editura Humanitas reprezintă un minunat exemplu despre cum ar trebui predată matematica. Între atâtea publicații pline de o matematică blocată într-o rigurozitate respingătoare, cartea lui Simon Singh ne prezintă, într-un mod lejer și totuși bine ordonat, o matematică plină de viață. Este ca și cum am da peste un diamant într-o grămadă de pietroaie.

Spicuind la întâmplare în această lucrare întâlnim nume ca Pitagora sau Euclid, Georg Cantor, Niels Henrik Abel, Carl Friedrich Gauss, Charles Hermite, Leonard Euler etc. Povestea despre hotelul lui Hilbert stă alături de numerele perfecte ale lui Pitagora; legătura dintre lungimea unui râu și numărul π urmează unei comparații între abordarea științifică a unei probleme și demonstrația matematică absolută; povestea lui Hippassus, elev al lui Pitagora, care a demonstrat primul iraționalitatea lui $\sqrt{2}$ stă alături de numărul π prezentat cu peste 1500 de zecimale; motivul pentru care greierul *Magicicada Septendecim* are un ciclu de viață de 17 ani este prezentat cu același interes ca și amănunte din extraordinara biografie a lui Evariste Galois etc.

Bucuria cu care se citesc acestea reprezintă pentru profesori un argument în plus ca lecțiile de matematică să cuprindă din când în când și elemente de istoria matematicii. Studenții sau liceenii vor găsi, pe lângă o matematică atractivă, multe biografii demne de urmat, dar și rețete pentru o învățare sănătoasă și creativă, aplicate cu succes de Andrew Wiles, cel care a reușit în opt ani să demonstreze marea Teoremă a lui Fermat.

Pe lângă exemple ce arată cum trebuie predată matematica, profesorii vor găsi o sumedenie de impresii despre felul în care sunt văzuți de cei din afara acestei bresle. Încheind la fel cum am început, ca și cum în cartea lui Simon Singh nu am găsi destule astfel de puncte de vedere, iată și pe cel al unui filolog, găsit într-o renumită revistă, la rubrica de „carte": „ Profesorii de matematică mi s-au părut întotdeauna niște oameni care au luat contact cu o civilizație extraterestră și nu și-au mai revenit niciodată ". Celor care nu vor să pară "picați din lună" le recomand călduros lecturarea „Marii Teoreme a lui Fermat". ☻ ☺

Pentagonul regulat şi tăietura de aur

Pentagonul este cea mai importantă figură geometrică neglijată de programa şcolară din ţara noastră. Poate datorită aurii sale mistice, sau cine ştie din ce alte motive, pentagonul regulat şi tăietura de aur sunt teme despre care elevii nu află mai nimic în şcoală. Pentru cei interesaţi de aceste teme, publicăm, începând cu acest caiet, o serie de lecţii, care în final vor putea forma materia pentru un curs opţional de liceu (aproximativ un semestru).

Din diverse motive, subiectele nu vor fi prezentate într-o ordine firească unui curs, ordonarea rămânând la dispoziţia fiecărui profesor.

Mulţumim tuturor celor care ne-au oferit subiecte sau informaţii pe această temă.

O problemă cu pentagoane

Conf. dr. Horea Banea, Braşov

a) Să se arate că există pentagoane înscrise într-un cerc astfel încât să aibă laturi de lungimi diferite, egale cu lungimile laturilor unor poligoane regulate înscrise în acelaşi cerc.

b) Presupunând că se realizează modele din carton pentru aceste pentagoane, câte discuri sunt necesare pentru a realiza toate modelele diferite de pentagoane de la a)?

c) Dacă L este mulţimea lungimilor laturilor acestor pentagoane, iar D este mulţimea lungimilor tuturor diagonalelor posibile (de la b)), să se găsească card D şi card $(D \cup L)$;

d) Calculaţi măsurile unghiurilor fiecărui pentagon de la b);

e) Construiţi cu rigla şi compasul pentagoanele de la b).

Răspunsuri:

a) Pentagoanele trebuie să aibă ca laturi: l_3, l_4, l_5, l_6, l_{20}, motivat prin unghiurile de la centru de măsuri: 120°, 90°, 72°, 60° şi 18°, care însumate dau 360°.

b) 12 discuri; răspunsul 24 este considerat greşit întrucât modelul de carton se poate întoarce pe ambele feţe.

c) card D = 9 (două dintre lungimile diagonalelor coincid). card $(D \cup L)$ = 13 căci lungimea laturii l_4 coincide cu o lungime de diagonală (cea care corespunde sumei arcelor având drept coarde pe l_5 şi l_{20}).

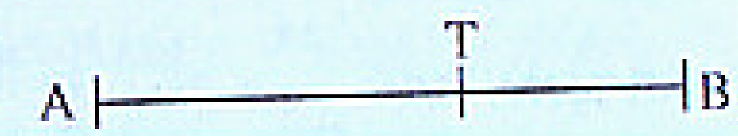
Fotbalul şi numărul de aur

Vasile Grigorovici, Or. Victoria – Braşov

Regulamentul jocului de fotbal prevede că: lovitura de pedeapsă se execută din punctul de pedeapsă în direcţia porţii adverse de la distanţa de 11m faţă de linia porţii (după 1890), iar poarta are lăţimea de 7,32m şi înălţimea de 2,44m (după 1874).

Vom arăta că aceste două prevederi din Regulament sunt legate de celebrul „număr de aur", fără ca acest fapt să fie menţionat ca atare în „Codul de la Cambridge", elaborat începând cu octombrie 1848.

§1 **Numărul de aur.** Fie un segment de dreaptă notat [AB]. Ne propunem să împărţim acest segment în două părţi de lungimi inegale [AT] şi [TB] astfel încât să fie verificată proporţia:

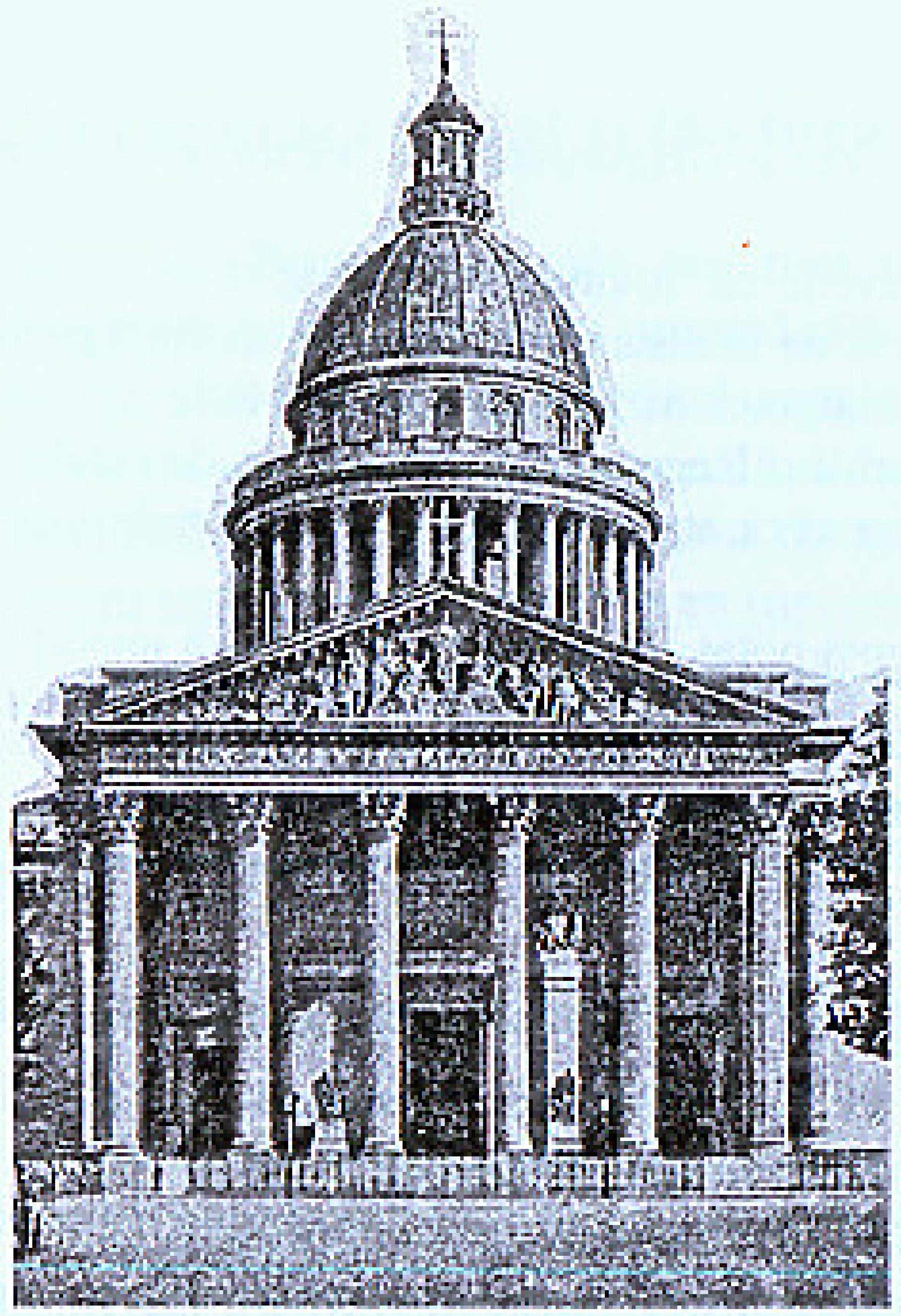


(1) $\frac{AT}{TB} = \frac{AB}{AT}$, unde $AT > TB$

Raportul $\frac{AT}{TB}$ se numeşte „număr de aur", notat de către Matila Ghyka (1881 – 1965) cu φ (de la numele sculptorului antic Fidias – sec V î.Hr). Împărţirea segmentului [AB] în segmentele [AT] şi [TB], conform propoziţiei (1) se numeşte „secţiunea de aur".

În continuare vom demonstra că punctul T există, şi vom determina valoarea numărului φ. Dacă AB = a, AT = b, TB = c, cu a, b, c $\in \mathbb{R}_+$, atunci relaţia (1) devine: $\frac{b}{c} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{b+c}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = 1 + \frac{c}{b}$, unde $\frac{b}{c} = \varphi$. Rezultă ecuaţia: $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \Leftrightarrow$ $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ cu $\Delta = 5 > 0$. Deci T există, chiar în dublu exemplar: $T \in [AB]$ şi $T' \notin [AB]$, $T' \in AB$. Alegem punctul T interior segmentului [AB]. Convenim ca raportul $\frac{AT}{TB} > 0$, pentru T interior lui [AB] şi $\frac{AT'}{T'B} < 0$ pentru T' în exteriorul segmentului [AB].

Prin rezolvarea ecuaţiei obţinute rezultă $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989...$ În practică „numărul de aur" se consideră $\varphi = 1{,}618$, iar $\frac{1}{\varphi} = 0{,}618$. Iniţiaţii egipteni şi greci numeau „secţiunea de aur" ca fiind „împărţirea în medie şi extremă raţie", iar actuala denumire de „sectio aurea" au dat-o renascentiştii italieni Fra Luca Pacioli di Borgo (1445 – 1514) şi Leonardo da Vinci (1452 – 1519). În secolul al XIX-lea, denumirea este reluată de către matematicianul Martin Ohm (1792 – 1842) – fratele fizicianului Georg Simon Ohm – sub forma „Goldenschnitt", rămasă în uz până astăzi. Sculptorii, pictorii şi arhitecţii din toate timpurile au folosit „numărul de aur", iar artiştii fotografi – şi mai nou cameramanii T.V. – împart lungimea, respectiv lăţimea cadrului prin puncte aflate la 1/3 şi 2/3 din dimensiunea aleasă. Observăm că $\frac{1}{3} = 0{,}333 \approx 0{,}382 = 1 - \frac{1}{\varphi}$, iar $\frac{2}{3} = 0{,}666 = 0{,}618 = \frac{1}{\varphi}$.



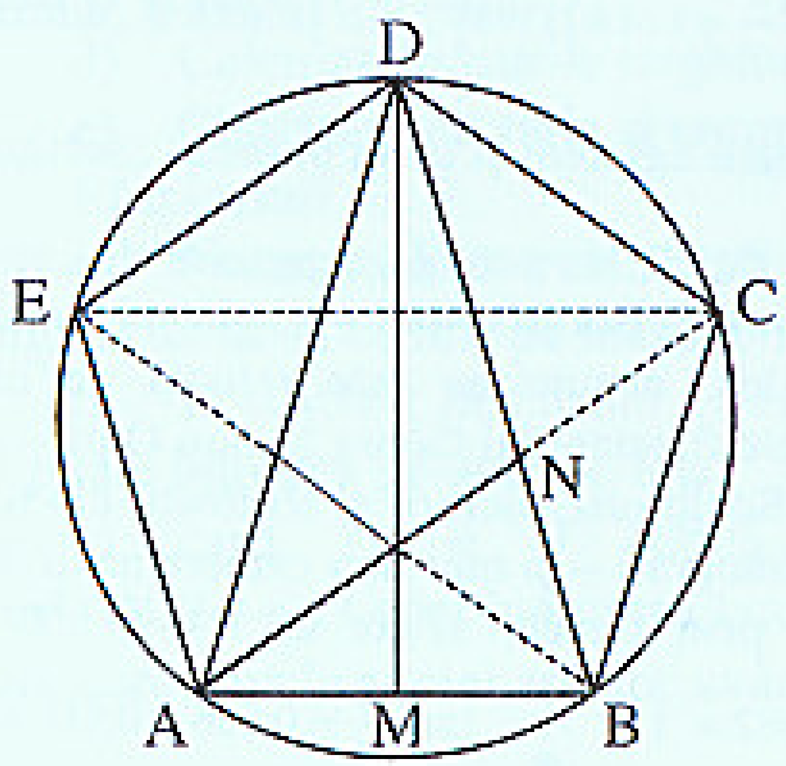
Menționăm că dimensiunile cadrului de pe filmul fotografic sunt L = 3,6 cm și l = 2,4 cm, de unde L/l = 3/2 ≈ φ și l/L = 2/3 ≈ 1/φ.

Prezentăm două monumente moderne, la care arhitecții au folosit „secțiunea de aur", respectiv „numărul de aur".

Primul este Panthéonul din Paris (celebru pentru experiența cu pendulul lui L. Foucault în 1851 prin care s-a demonstrat că Pământul se rotește în jurul axei sale proprii – Nord-Sud) care are lungimea fațadei L, înălțimea fațadei h și înălțimea cupolei H în următoarea relație: $\frac{L}{h}=\frac{H}{L}=1{,}618=\varphi$, relație ce poate fi verificată și pe măsurători făcute pe figura de mai sus. Deci $L^2 = H \cdot h$, adică L este media geometrică între H și h, iar valoarea raportului este numărul de aur (fig. stânga).

Al doilea exemplu este dat de cunoscuta Casă albă din Washington D.C. În acest caz raportul dintre lungimea L și înălțimea H a fațadei este L/H = 3 ≈ 3,236 = 2 · φ (fig. dreapta). Se poate considera și raportul invers: $\frac{H}{L}=\frac{1}{3}=0{,}333\approx 1-\frac{1}{\varphi}$, raport folosit frecvent și de artiștii artelor vizuale.

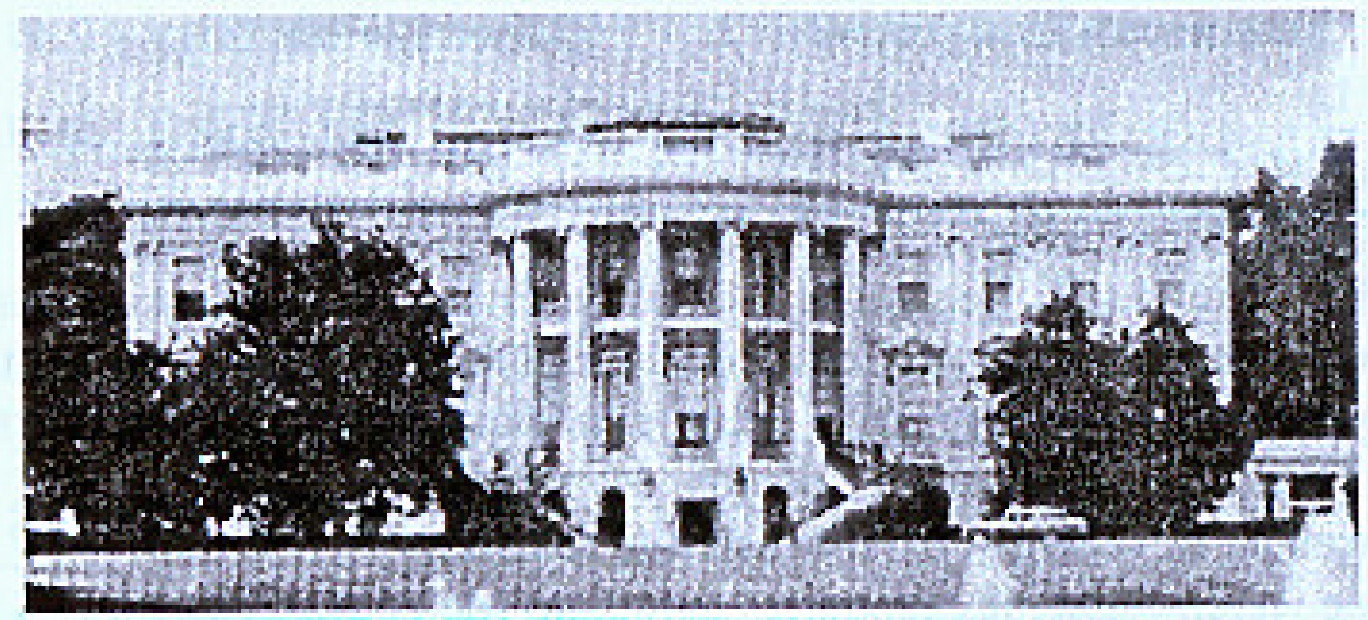
§2 Pentagonul regulat și triunghiul de aur. Considerăm un cerc în care sunt înscrise cele două pentagoane: pentagonul regulat convex de latură $AB = l_5 = x$ și pentagrama (pentagonul regulat stelat) cu latura $AD = l'_5 = y$. Se observă că: m (∢ADB) = 36°, m (∢ADM) = 18° și m (∢DAM) = m (∢DBM) = 72°, iar m (∢AMD) = 90°. Vom cerceta valoarea raportului dintre l'_5 și l_5, adică $\frac{AD}{AB}$. Din figură rezultă că ΔBDA ~ ΔBAN, unde [AN este bisectoarea ∢DAB. Rezultă că $\frac{DB}{AB}=\frac{AB}{NB} \Leftrightarrow$



$$\frac{y}{x}=\frac{x}{y-x} \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{y}{x}-1} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}-1=0;$$

Fie $t=\frac{y}{x}$, de unde ecuația devine: $t^2-t-1=0$

cu rădăcina pozitivă $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ care este numărul de aur. Deci $\frac{l'_5}{l_5}=1{,}618=\varphi$, adică raportul dintre latura pentagramei și latura pentagonului regulat este „numărul de aur". Triunghiul DAB de mai sus este cunoscut sub denumirea de „triunghiul de aur", iar triunghiul dreptunghic DMA se numește „triunghi platonic", dar este numit și „triunghi druidic", deoarece druizii (preoții celți din Galia și Britania antică) preluaseră tradiția ezoterică platonică. În acest triunghi remarcăm rapoartele $\frac{AD}{AM}=2\varphi=3{,}236\approx 3$ și $\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2\varphi}=0{,}309\approx\frac{1}{3}$

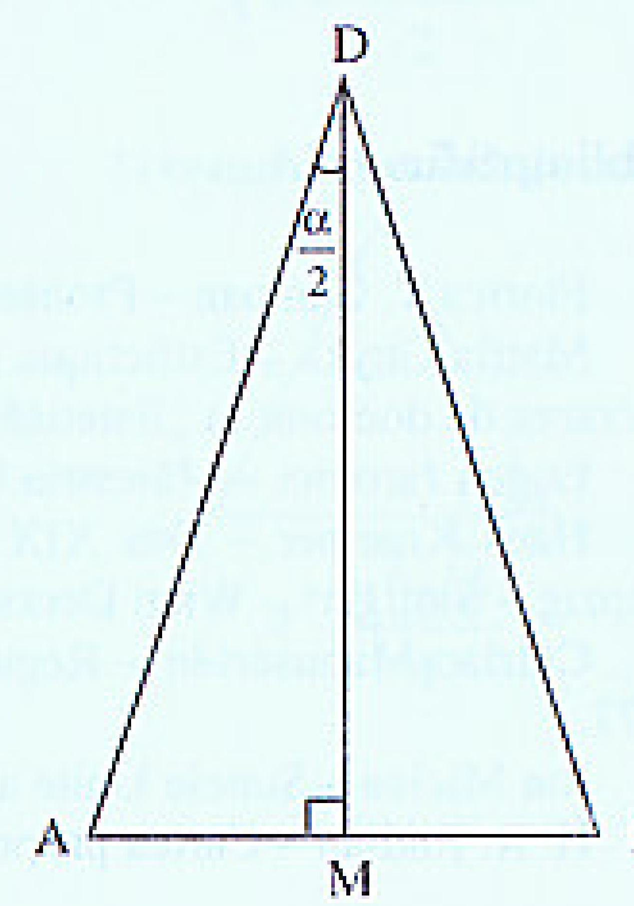


§3 Lovitura de pedeapsă și triunghiul de aur. În cele ce urmează folosim sistemul de unități de lungime englezesc, adică yardul sau piciorul (1 yard = 3 picioare), urmând să facem legătura cu sistemul metric pe parcursul lucrării.

Conform Regulamentului din 1874, se prevede că poarta de fotbal trebuie să aibă circa 8 yarzi iar lovitura de pedeapsă (începând cu 1890) să se execute de la 12 yarzi.

Construim ΔADB cu AB = 8 yarzi și DM = 12 yarzi, unde D este punctul de pedeapsă, iar A și B buturile porții. Fie α = m(∢ADB), deci $\frac{\alpha}{2}$ = m (∢ADM) și ∢ M = 90°. În ΔAMD, AM = 4 și DM = 12; calculăm $\frac{\alpha}{2}$: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=18{,}43°$. Rezultă că poarta de fotbal se vede din punctul de pedeapsă sub un unghi foarte apropiat de 36° (eroare sub un grad: α = 36,86°), adică ΔADB de pe terenul de fotbal aproximează foarte bine triunghiul de aur (dublul triunghi platonic).

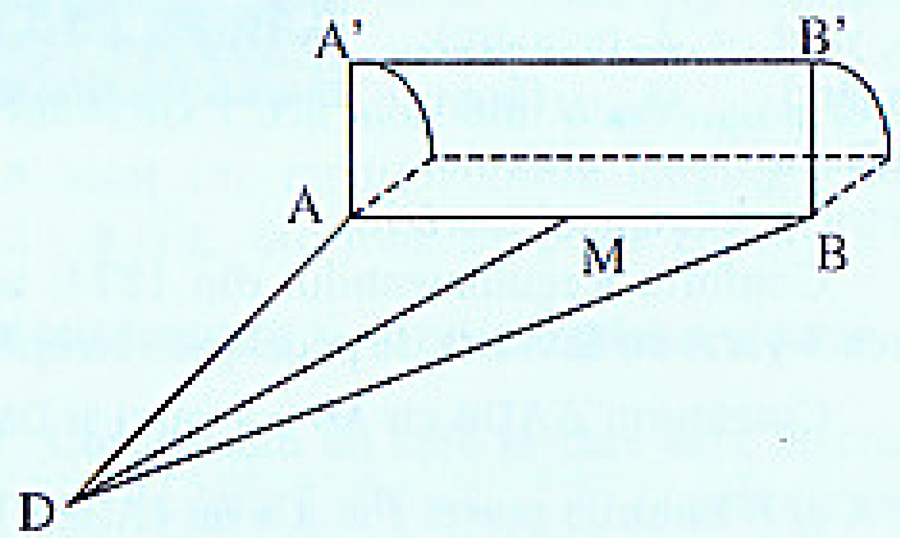
Concluzionăm că raportul dintre distanța de la punctul de pedeapsă D la oricare din stâlpii porții de fotbal (A sau B) și lățimea porții (AB) este foarte apropiat de numărul de aur. Într-adevăr, dacă AM = 4 yarzi și DM = 12 yarzi, rezultă că DA = 12,65 yarzi deci $\frac{DA}{AB}=\frac{DB}{AB}=\frac{12{,}65}{8}=1{,}58\approx\varphi$.



De ce „lovitura de pedeapsă" se numeşte „lovitura de la 11 m"? Explicaţia constă în „traducerea" dimensiunilor date în yarzi sau picioare în dimensiuni date în metri. Se ştie că 1 yard = 3 feet (picioare) = 0,9144 m, de unde rezultă că DM = 12 yarzi = 10,9728 m ≈ 11 m. Deci lovitura de pedeapsă, care în „Codul de la Cambridge" se execută de la 12 yarzi, devine lovitura de la 11 m în cazul sistemului metric continental.

§4 **Dimensiunile porţii de fotbal şi numărul de aur.** În regulamentul jocului de fotbal (după 1874) se arată că porţile sunt alcătuite din stâlpi verticali, fixaţi la o depărtare de 7,32 m unul de celălalt (distanţa interioară) şi sunt uniţi printr-o bară orizontală a cărei margine inferioară va fi la 2,44 m de pământ. Acestea se obţin prin traducerea dimensiunilor din regulamentul britanic, în dimensiuni din sistemul metric: L = 8 yarzi = 7,3152 m ≈ 7,32 m, respectiv h = 2,666 yarzi = 2,4377 m ≈ 2,44 m. Regăsim aici raportul $\frac{L}{h} = 3 \approx 2\varphi$, sau $\frac{h}{L} = \frac{1}{3} = 0{,}333 \approx 1 - \frac{1}{\varphi}$, deci poarta de fotbal este asemenea cu faţada Casei Albe.

§5 **Concluzii:** Legăturile jocului de fotbal cu numărul de aur se explică prin faptul că cei care au elaborat Codul de la Cambridge erau personalităţi din cadrul colegiilor, profesori şi studenţi, care aveau cunoştinţă despre valoarea estetică a numărului de aur. Alături de frumuseţea jocului de fotbal, trebuie să vedem şi că dimensiunile folosite pe teren sunt în rapoarte apropiate de numărul de aur, fapt care leagă acest popular joc de monumentele Antichităţii şi Renaşterii sau de cele moderne. În acest fel punctul de pedeapsă şi poarta de fotbal formează un adevărat sanctuar antic.



$\frac{DA}{AB} = \frac{DA}{AB} = \varphi$ şi $\frac{AB}{AA'} = 2\varphi$, cu DM = 11m.

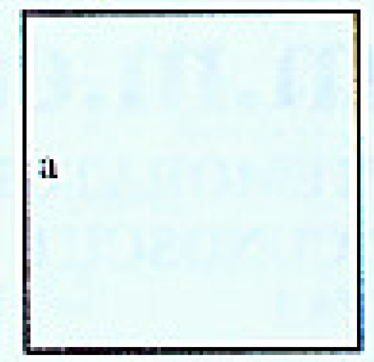
☻ ☺

Bibliografie

1. Florica T. Câmpan – Probleme celebre; Colecţia Lyceum – Ed. Albatros 1972
2. Matila Ghyka – Esthetique des proportions dans la nature et dans les arts Paris 1927 (lucrarea de doctorat în „Estetică matematică" la Universitatea Sorbona)
3. Eugen Jarovici – Măiestria în fotografie – Ed. tehnică 1979
4. Hans Kraemer – Das XIX Jahrhundert in Wort und Bild – Erster Band Berlin – Leipzig – Stuttgart – Wien Deutsches Verlagshaus Bong & Co.
5. Chiriac Manusaride – Regulamentul jocului de fotbal adnotat – Ed. sport – turism 1977.
6. Ion Miclea – Statele Unite ale Americii – Ed. meridiane 1976
7. H. R. Radian – Cartea proporţiilor – Ed. Meridiane Bucureşti 1981

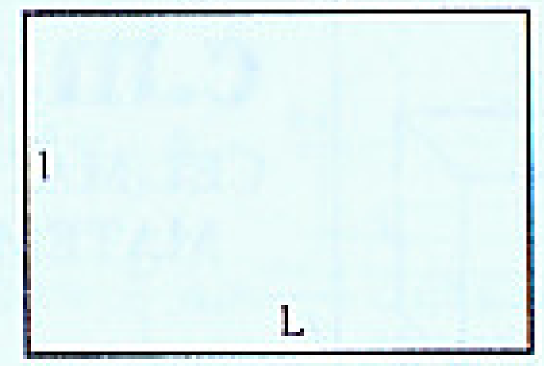
C. M. M. M. M. C. – ARII ELEMENTARE

pătratul



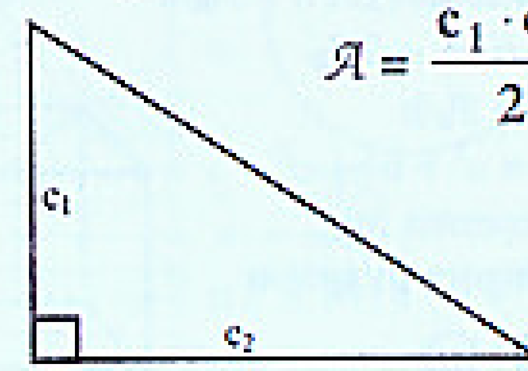
$\mathcal{A} = a^2$

dreptunghiul



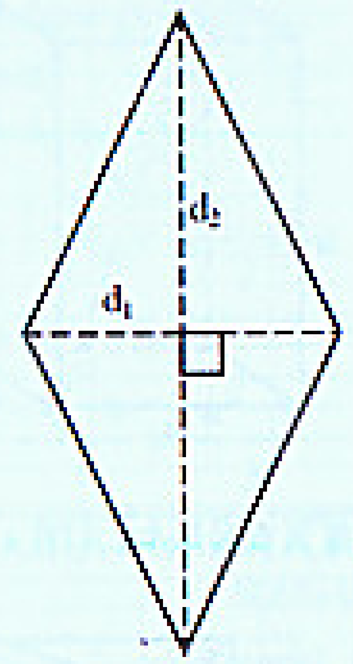
$\mathcal{A} = L \cdot l$

triunghiul dreptunghic



$\mathcal{A} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

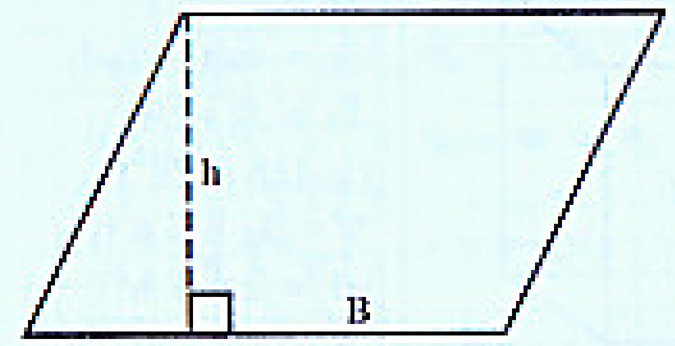
rombul



$\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

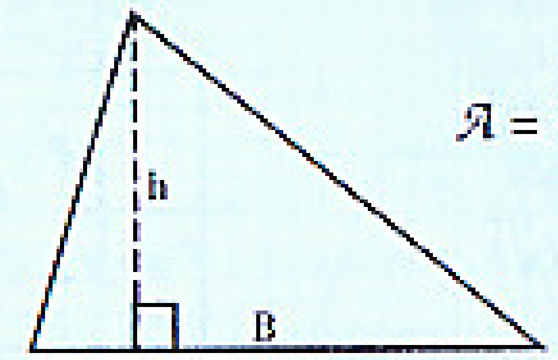
☻ ☺

paralelogramul



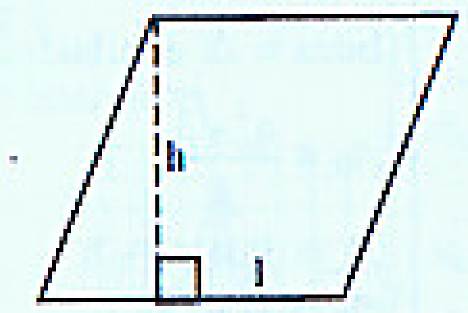
$\mathcal{A} = B \cdot h$

triunghiul oarecare



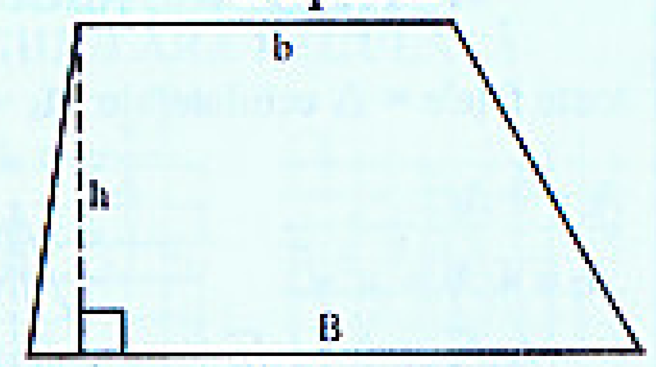
$\mathcal{A} = \frac{B \cdot h}{2}$

rombul (2)



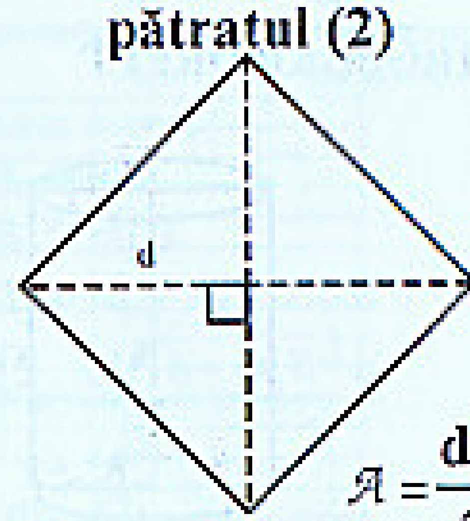
$\mathcal{A} = l \cdot h$

trapezul



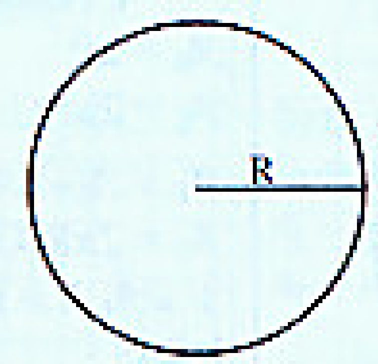
$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

pătratul (2)



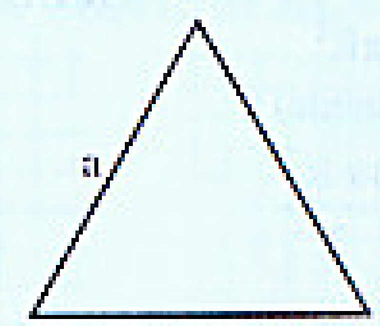
$\mathcal{A} = \frac{d^2}{2}$

cercul



$\mathcal{A} = \pi \cdot R^2$

triunghiul echilateral



$\mathcal{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Proporționalitatea directă și proporționalitatea inversă

Proporționalitatea, ca fenomen, reprezintă una din noutățile majore cu care se întâlnește elevul în clasa a VI-a. Este un fenomen natural ce are o legătură clară cu practica. Din păcate această legătură s-a cam pierdut în unele lecții. Iată câteva exemple:

1. În manuale și culegeri se găsesc o sumedenie de probleme care cer a se împărți o cantitate în părți direct proporționale cu anumite numere date ($x + y + z = S$ și $(x, y, z) \sim (a, b, c)$). Rezolvarea predată de obicei elevilor se bazează pe proprietatea șirului de rapoarte egale: $\frac{x}{a}=\frac{x}{b}=\frac{x}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$. Cei mai mulți dintre elevi nu înțeleg în profunzime această proprietate așa că învață rezolvarea mecanic. Dovada în acest sens o reprezintă frecvența ridicată cu care apare în rezolvări următoarea greșeală: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$.

O rezolvare mai accesibilă gândirii elevilor este următoarea: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k \Rightarrow x = k \cdot a;\ y = k \cdot b;\ z = k \cdot c \Rightarrow x + y + z = S \Leftrightarrow k\,(a + b + c) = S$, ce se poate rezolva ușor ca ecuație. Totuși nici această rezolvare nu pătrunde clar fenomenul proporționalității, ci se bazează mai mult pe o serie de artificii de calcul algebric. Prezentată însă într-o formă mai primitivă, această rezolvare poate face lumină în gândirea elevilor. Iată, exemplificat pe o problemă:

Exemplul 1: Trei prieteni cumpără împreună o roată de cașcaval, astfel: primul plătește 45.000 lei, al doilea 27.000 lei iar al treilea 18.000 lei. Ajutați-i pe cei trei prieteni să-și împartă cașcavalul proporțional cu suma plătită de fiecare.

Rezolvare: Trebuie să împărțim 360° direct proporțional cu numerele 45, 27 și 18. Cașcavalul a costat 90.000 lei. Ne imaginăm că-l împărțim în 90 de părți (felii). Primul va primi 45 de părți, al doilea 27 de părți iar ultimul 18 părți, care în total compun roata de 360°. Vom scrie:

$$\begin{array}{lcl} A = 45\,p & & A = 45 \cdot 4° = 180° \\ B = 27\,p & \text{deci} & B = 27 \cdot 4° = 108° \\ \underline{C = 18\,p} & & C = 18 \cdot 4° = 72° \end{array}$$

$$360° = 90\,p \Rightarrow p = 4°$$

2. O adevărată gafă apare la predarea proporționalității inverse: faptul că numerele x, y, z sunt invers proporționale cu a, b, c se exprimă prin șirul de rapoarte egale $\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}$. În realitate așa cum proporționalitatea directă se

reprezintă prin egalitatea de rapoarte $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, tot așa proporționalitatea inversă se exprimă prin egalitate de produse $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$. Șirul de rapoarte prezentat în manuale a ajuns „vedetă" pentru că reprezintă o modalitate de a aplica și aici mult îndrăgita proprietate a șirului de rapoarte egale. Faptul că proporționalitatea inversă se reprezintă printr-un produs constant, se poate înțelege clar printr-un exemplu bine ales:

Exemplul 2: Opt muncitori sapă o grădină în 12 ore. În câte ore vor săpa grădina a) 4 muncitori; b) 6 muncitori; c) 18 muncitori?

Rezolvare: 4 muncitori au nevoie de timp dublu, adică 24 de ore. 2 muncitori vor avea nevoie de 48 de ore iar un singur muncitor ar săpa grădina în 96 de ore. Putem spune că această grădină necesită 96 de ore de muncă. Acestea se vor împărți la câți muncitori vor fi la lucru. În cazul a 6 muncitori, aceștia vor lucra câte 96 : 6 = 16 ore. În cazul a 18 muncitori, aceștia vor lucra fiecare $96 : 18 = 5\frac{1}{3} =$ 5h 20 min. Observăm clar că toată rezolvarea se bazează pe păstrarea constantă a produsului: $8 \cdot 12 = 4 \cdot 24 = 6 \cdot 16 = 18 \cdot 5\frac{1}{3}$.

3. Un al treilea moment de „predare împiedicată" îl reprezintă problemele rezolvate prin regula de trei simplă. Elevii nu primesc repere clare după care să stabilească tipul de proporționalitate din fiecare problemă. Iar apoi, rezolvare în cazul proporționalității inverse nu este deloc justificată în unele manuale.

În cadrul unei proporții putem avea ori ambii numărători mai mari ori ambii numitori mai mari. Un raport supraunitar și un raport subunitar nu pot forma o proporție. Acesta poate fi un criteriu clar de stabilire a tipului de proporționalitate: la proporționalitatea directă găsim în schema de la regula de trei simplă o aranjare normală pentru o proporție (de exemplu ambii numărători mai mari decât numitorii), pe când la proporționalitatea inversă vom întâlni întotdeauna false „proporții" (adică un raport supraunitar și unul subunitar). Să exemplificăm în ambele cazuri:

Exemplul 3: Un elev rezolvă 24 de probleme în 3 zile. Păstrând ritmul de lucru, în câte zile va rezolva 80 de probleme?

Rezolvare:

$$\begin{array}{l} \downarrow\ 24\,p \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3 \text{ zile}\ \downarrow \\ \ 80\,p \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x \text{ zile} \end{array}$$

Este clar că la 80 de probleme are nevoie de mai multe zile, adică $x > 3$. Săgețile, arătând către numărul mai mare, stau la fel deci avem de rezolvat proporția $\frac{24}{80}=\frac{3}{x} \Rightarrow x = 10$ zile (am avut proporționalitate directă).

Exemplul 4: Un automobil parcurge distanța dintre două localități în 3 ore mergând cu viteza medie de 60 km/h. Ce viteză medie ar trebui să aibă pentru a parcurge aceeași distanță în 2 ore?

Rezolvare: ↑ 3 ore ....60 km/h ↓
2 ore .... x km/h

Este clar că în al doilea caz trebuie să meargă mai repede, adică $x > 60$. Săgețile, care arată întotdeauna numărul mai mare, nu stau la fel, adică „egalitatea" $\frac{3}{2}=\frac{60}{x}$ din această problemă este greșită (nu este o proporție), deci avem o proporționalitate inversă. Deoarece trebuie să avem produse egale, putem rezolva ecuația $3 \cdot 60 = 2 \cdot x$. Dacă dorim însă o rezolvare cât mai asemănătoare cu cea de la proporționalitatea directă, putem inversa unul din rapoartele din egalitatea falsă $\frac{3}{2}\neq\frac{60}{x}$, pentru a avea o proporție, pe care apoi o rezolvăm: $\frac{3}{2}=\frac{x}{60} \Rightarrow x = 90$ km/h. Faptul că această din urmă egalitate este adevărată, rezultă din egalitatea produselor de mai sus. Analog, se poate face și o scurtă demonstrație pe cazul general, pentru această metodă de rezolvare:

↑ a ....b ↓
c ....d $\Rightarrow a \cdot b = c \cdot d \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ (raportul $\frac{b}{d}$ a fost inversat).

4. Chiar dacă nu mai sunt în programă, proporțiile derivate rămân o temă tentantă, atât în clasa a VI-a, cât și la recapitularea din a VIII-a. Demonstrarea proporțiilor derivate pe bază de adunare sau scădere se face în manualul vechi cu ajutorul valorii raportului. Folosind operațiile cu fracții putem da o demonstrație mult mai simplă: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,\Big|+1 \Rightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ etc.

5. Unul dintre exercițiile cele mai ciudate din acest capitol este următorul:

Exemplul 5: Știind că $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, calculați valoarea raportului $\frac{4a+3b}{5a+2b}$. Acest exercițiu reprezintă o enigmă pentru cei mai mulți elevi. De ce? Pentru că ei calculează valoarea raportului cerut pentru $a = 2$ și $b = 3$, obțin răspunsul bun și nu înțeleg ce au greșit. Chiar dacă înțeleg că a și b pot lua și alte valori, nu vor pricepe de ce rezolvarea lor nu este bună. Doar au ajuns la răspunsul corect.

☻ ☺

Reprezentarea conicelor în spațiul complex

Titus Grigorovici

Totul a început în primăvara lui 1989 cu o întrebare stupidă: În cazul $\Delta \geq 0$, rădăcinile reale ale funcției de gradul al II-lea se află la intersecția parabolei cu axa absciselor; în cazul $\Delta < 0$, unde se află rădăcinile complexe față de parabolă? Răspunsul l-am intuit după două ore, demonstrația am „dat-o gata" în patru ani, iar finalizarea teoriei am reușit-o la începutul acestui an (2001). Iată, în premieră absolută, această teorie.

1. PARABOLA

Fie ecuația $y = ax^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{a}$ cu $a > 0$; cazul $a < 0$ se va discuta similar.

Suntem obișnuiți cu reprezentarea grafică a soluțiilor reale ale acestei ecuații, adică pentru $y \geq 0$. Pentru a studia reprezentarea grafică și în cazul complex, generalizăm ecuația: $y = aX^2 \Leftrightarrow X^2 = \frac{y}{a}$ cu $X = x + zi$, cu $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dacă $y \geq 0 \Rightarrow X_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{y}{a}} = x_{1,2} \in \mathbb{R}$,

iar punctele (x_1, y) și (x_2, y) formează cele două ramuri ale parabolei din planul real (xOy).

Dacă $y < 0 \Rightarrow X_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{-y}{a}} = i \cdot z_{1,2} \in \mathbb{I}$,

iar punctele $(z_1; y)$ și $(z_2; y)$ formează cele două ramuri ale unei parabole din planul complex (zOy).

Menționez că am notat cu $\mathbb{I} = \{i \cdot z \mid z \in \mathbb{R}\}$.

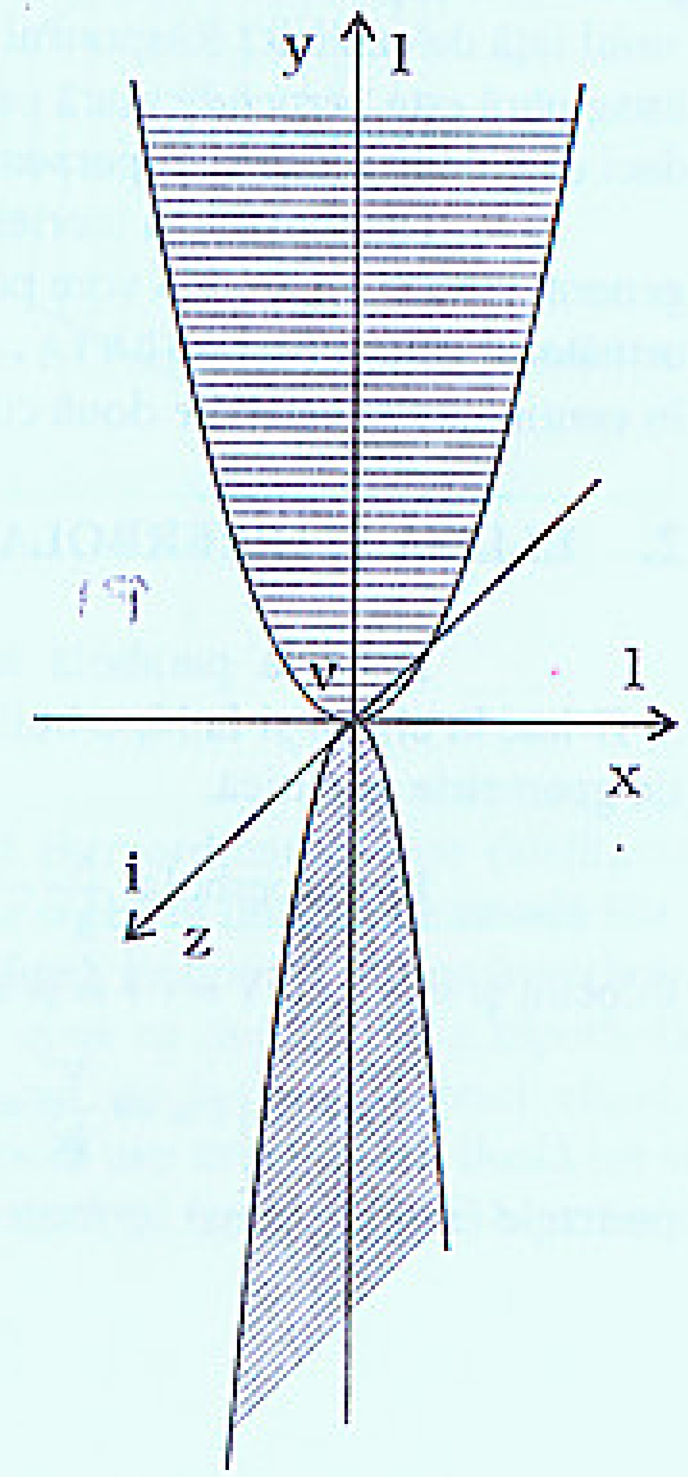
Să studiem această parabolă.

Neglijând factorul imaginar i, obținem:

$i \cdot z_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{-y}{a}}\,\Big|:i \Rightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-y}{a}}\,\Big|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = \frac{-y}{a} \Rightarrow y = -az^2$.

Aceasta este ecuația unei parabole congruente cu prima, cu același vârf, dar cu ramurile în jos, situată într-un plan complex, perpendicular pe planul primei parabole.



Pentru a încerca un prim răspuns la întrebarea inițială putem deplasa ecuația $y = aX^2$ în sus, pentru ca parabola reală să nu mai atingă axa absciselor.

Fie $y = aX^2 + c$, cu $c > 0$.

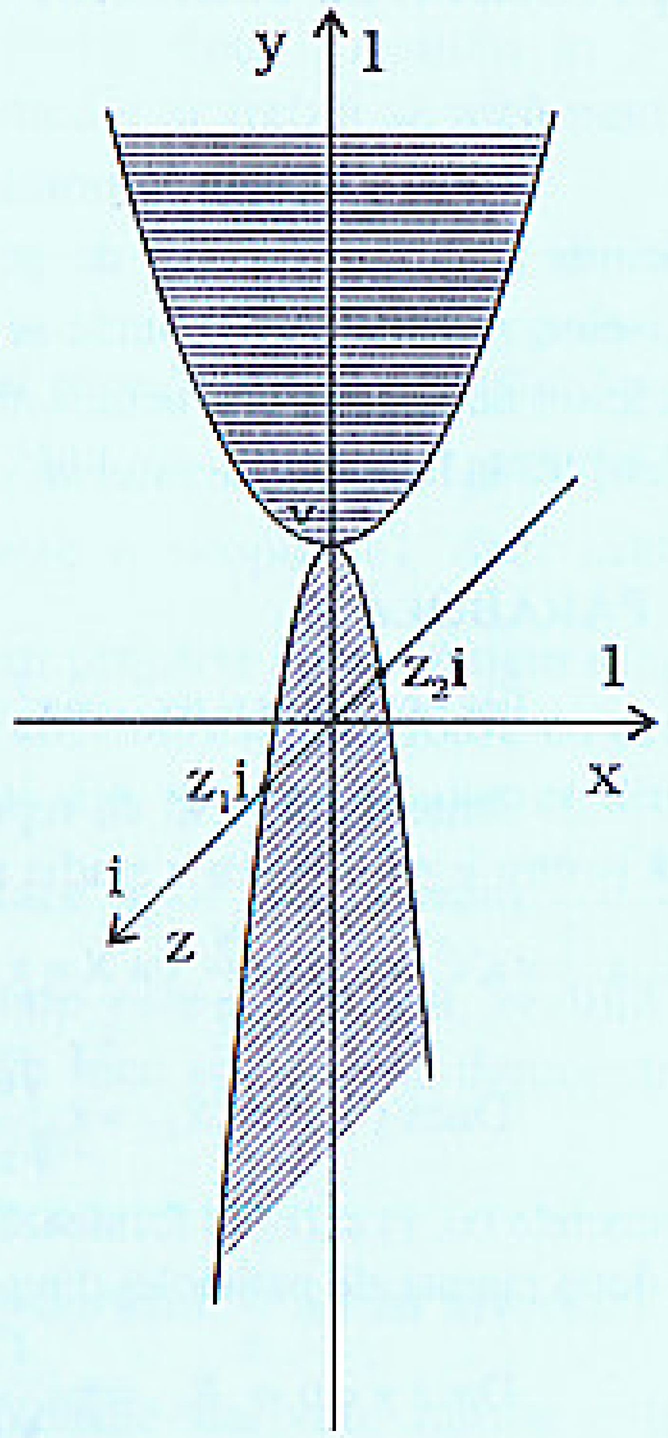
Rădăcinile funcției atașate se obțin pentru $y = 0 \Rightarrow aX^2 + c = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow X^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow X_{1,2} = \pm\, i\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\, i \cdot z_{1,2}$$

Se vede că rădăcinile complexe ale funcției de gradul al II-lea se află la intersecția dublei parabole (real-imaginară) cu planul complex al absciselor (xOz), plan ce este perpendicular pe axa ordonatelor Oy.

Cu aceasta am răspuns și unei alte întrebări vehiculate în lumea matematicienilor: care este legătura între planul real și planul complex cum stau acestea unul față de celălalt? Răspunsul este clar: axa imaginară este perpendiculară pe planul real, deci cele două plane sunt perpendiculare.

Demonstrarea teoriei pe cazul general $y = aX^2 + bX + c$ o vom prezenta în următorul caiet P3NT4GON1A. Să studiem în continuare și celelalte două curbe conice.



2. ELIPSA ȘI HIPERBOLA

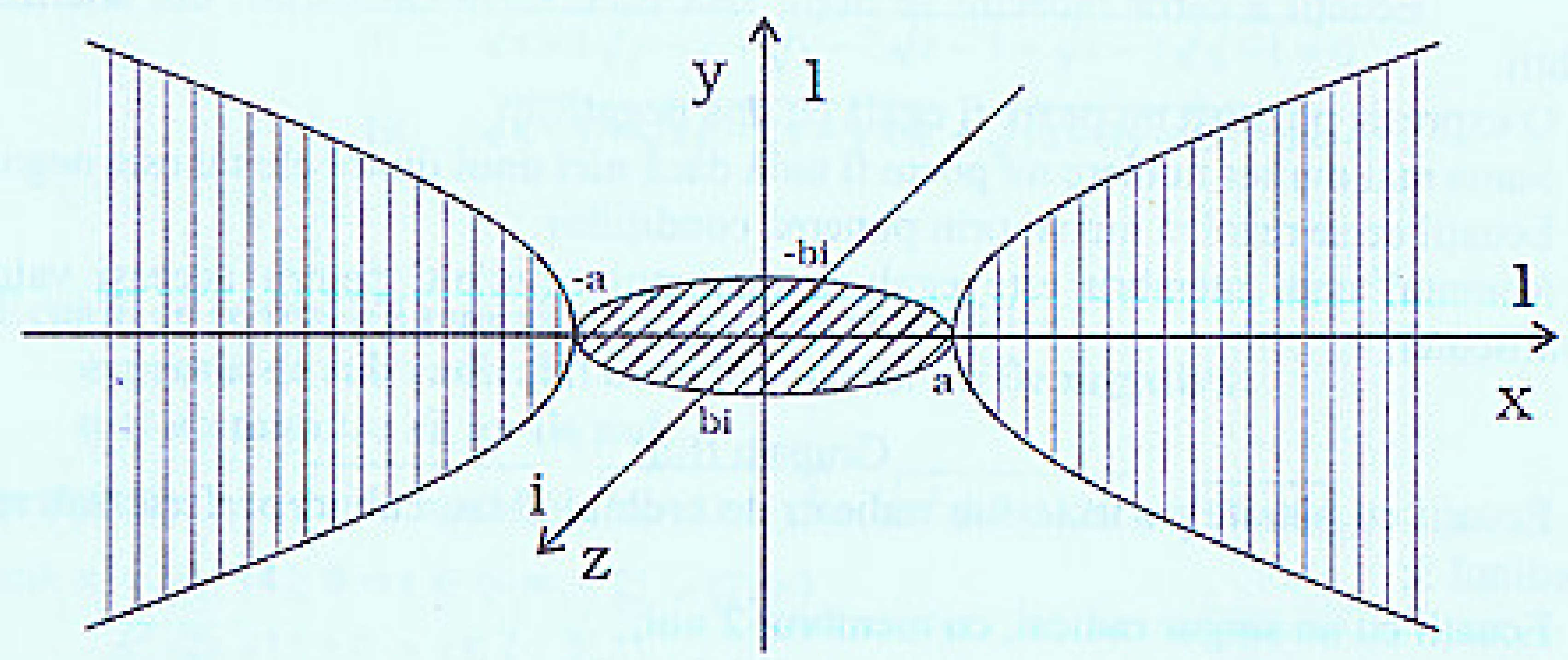
Dacă la parabolă am lucrat cu ecuația cunoscută de la funcția de gradul al II-lea, la elipsă și la hiperbolă vom folosi ecuațiile particulare cunoscute din manualele de geometrie analitică.

Fie hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$ reprezentată în planul (xOy). Am înlocuit și aici y cu $Y = y + zi$ și am obținut:

Dacă $|x| \geq a \Rightarrow \frac{Y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{Y}{b} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \in \mathbb{R} \Rightarrow Y = y_{1,2} \in \mathbb{R}$; iar punctele (x, y_1) și (x, y_2) formează hiperbola reală în planul real (xOy).

Dacă $|x| < a \Rightarrow \frac{Y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{Y}{b} = \pm i\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \in \mathbb{I} \Rightarrow Y = i \cdot z_{1,2} \in \mathbb{I}$; în acest caz obținem punctele unei elipse imaginare în planul complex (xOz), pentru că, neglijând factorul imaginar i, ecuația $\frac{zi}{b} = \pm i\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \,\Big|\, :i$ devine $\frac{z}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \,\Big|^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Aceasta este evident ecuația unei elipse în (xOz).



Pe această reprezentare grafică se evidențiază extraordinar de clar dualitatea dintre hiperbolă și elipsă; hiperbola reală are ca duală a sa o elipsă imaginară situată într-un plan perpendicular față de planul hiperbolei; această elipsă imaginară atinge hiperbola reală în vârfurile sale. În mod similar, o elipsă reală va avea ca duală a sa o hiperbolă imaginară. Pentru aceasta se pot reface calculele pornind de la ecuația unei elipse. Interesant, din acest punct de vedere, este faptul că parabola are drept curbă duală tot o parabolă. Ca o ultimă observație, se vede că cercul este dual în acest sens cu hiperbola echilateră. ☻ ☺