29 FEBRUARIE 2000

Din punct de vedere matematic, acest an 2000 este plin de surprize. În primul rând pentru faptul că majoritatea mass-mediei, împinsă de goana după senzație a reușit să convingă populația, în mod eronat, că acesta este primul an al mileniului III. Este ca și cum, de exemplu, al 60-lea minut ar fi primul din următoarea oră.

Un alt element matematic aparte al acestui an îl reprezintă a 29-a zi a lui februarie. De ce, veți întreba, 2000 este an bisect, deci este normal să aibă o zi în plus. Iată răspunsul:

Conform calendarului gregorian, aprobat de Papa Grigore al XIII-lea, în 1582, valoarea unui an este dată de expresia:

$$1\text{ an} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}\text{ zile} = 365{,}2425\text{ zile}$$

Ce reprezintă acestea?

$+ 1 / 4$ înseamnă că la patru ani apare o zi în plus (29 februarie).

$- 1 / 100$ înseamnă că la 100 ani se pune o zi mai puțin, adică nu se mai pune 29 februarie.

$+ 1 / 400$ îseamnă că o dată la 400 ani se pune totuși acea zi în plus.

Cu alte cuvinte anii 1700, 1800, 1900, 2100 au în februarie doar 28 zile (ani seculari). În schimb 1600, 2000, 2400 au totuși 29 zile în cea mai scurtă lună a anului.

(după H. R. Radian, T. J. Radian, Recreații matematice)

ISBN: 973 - 9196 - 49 - 7
EDITURA TRIADE 2000

P3NT4GON1A

TESTE PREGĂTITOARE PENTRU EXAMENELE DE CAPACITATE DIN ANUL 2000.

FIGURILE GEOMETRICE ȘI CULORILE

EXTRAGEREA RADICALULUI

$$\sqrt{2000}$$

CAIETE SEMESTRIALE DE MATEMATICĂ
NUMĂRUL 6 FEBRUARIE 2000

O PROBLEMĂ CU VITEZE

Eugen Dodul

PROFESORUL: De la Cluj la Dej sunt 60 km. Vehicolul A parcurge drumul dus - întors cu viteza constantă de 60 km/h. Vehicolul B merge la dus cu 50 km/h iar la întoarcere cu 70km/h. Care dintre cele două vehicole va ajunge primul înapoi la Cluj?

ELEVUL: Ajung deodată înapoi.

PROFESORUL: Hai să mai luăm un exemplu. Vehicolul A păstrează viteza constantă de 60 km/h, în timp ce vehicolul B merge cu 40 km/h la dus şi cu 80 km/h la întoarcere. Care ajunge primul înapoi la Cluj?

ELEVUL: Tot deodată ajung înapoi.

PROFESORUL: Mai luăm un exemplu. Vehicolul A păstrează viteza de 60 km/h şi la dus şi la întors, pe când vehicolul B merge cu 30 km/h la dus şi se întoarce cu 90 km/h. Care ajunge primul înapoi?

ELEVUL: Tot deodată ajung şi acum.

PROFESORUL: Păi bine măi copile, ia să ne uităm mai atent! Vehicolul A face drumul dus - întors în două ore. Vehicolul B are nevoie în ultimul caz, doar pentru drumul dus, de două ore. Nici dacă zboară nu mai poate ajunge deodată cu vehicolul A înapoi la Cluj.

Cuprins

CAIETE DE MATEMATICĂ P3NT4GON1A

TITUS GRIGOROVICI - redactor coordonator
MARIANA GRIGOROVICI - redactor
ADRIANA ONDREIOV - tehnoredactor
EDITURA TRIADE - C.P. - 1 - 400, 3400, CLUJ - NAPOCA
Tipărit la PRINTEK, CLUJ - NAPOCA, tel: 092-744932
Comenzi la tel: 098 - 601275

FIGURILE GEOMETRICE ŞI CULORILE

Înfiinţată de Walter Gropius la Weimar (1919) şi transferată ulterior la Berlin (1933), BAUHAUS a fost o şcoală de arhitectură şi arte aplicate, ce a influenţat într--o măsură covârşitoare arhitectura şi arta acestui secol. Numai dacă ne gândim la cubismul promovat cu aşa mare succes în arhitectură, şi ne putem da seama ce influenţă uriaşă a avut această şcoală asupra societăţii secolului al XX-lea.

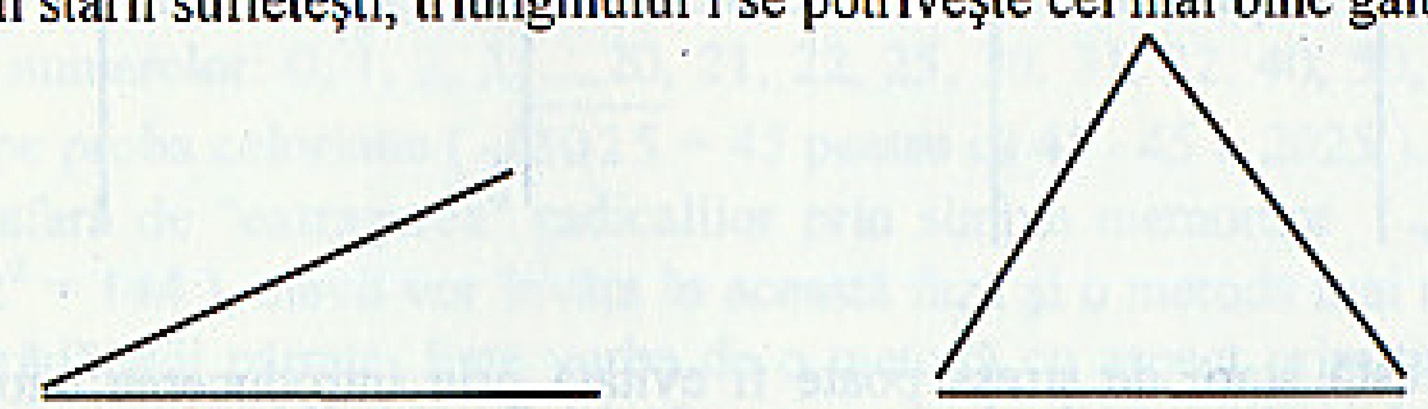
Unul dintre principalii reprezentanţi ai şcolii BAUHAUS a fost Wassily Kandinsky (1866 - 1944), pictor şi desenator rus naturalizat german, apoi francez, unul dintre promotorii picturii abstracte nonfigurative.

În timpul activităţii sale la BAUHAUS, Kandinsky a pus la punct următoarea teorie cu privire la legătura temperamentală existentă între cele trei culori de bază - roşu, galben şi albastru (culorile pure, nu cele derivate) - pe de o parte , şi cele trei figuri geometrice principale - cercul, pătratul şi triunghiul echilateral - pe de cealaltă parte.

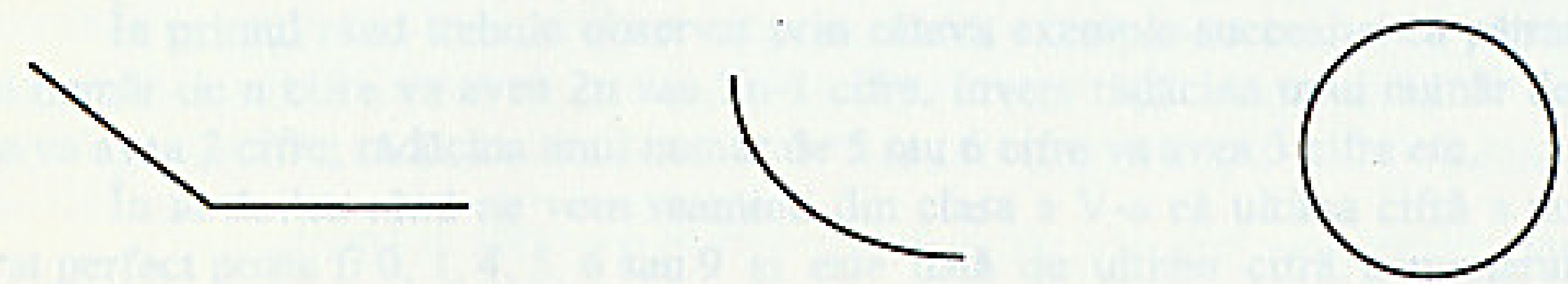
Astfel, spunea Kandinsky, există următoarele legături:

Triunghiul (unghiul ascuţit) → galben
Pătratul (unghiul drept) → roşu
Cercul (unghiul obtuz) → albastru

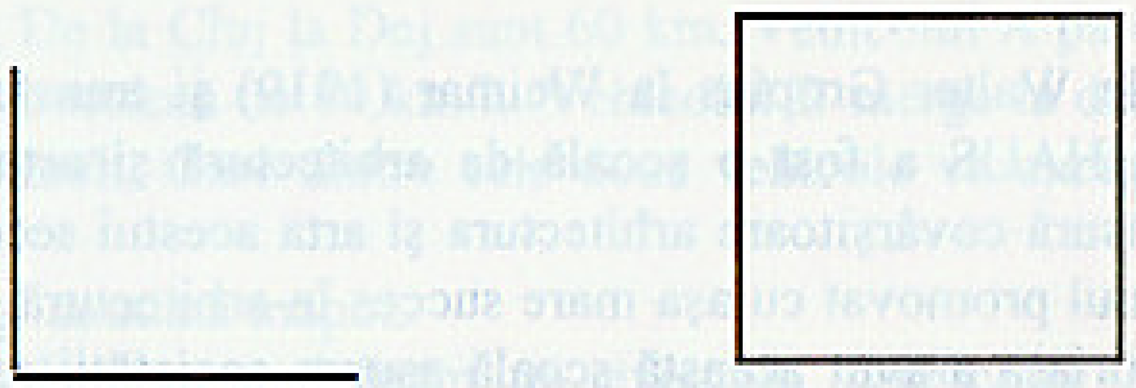
Să lămurim pe rând aceste afirmaţii. Unghiul ascuţit este unul voios, sprinţar, plin de veselie. La fel este şi triunghiul, dar şi culoarea galbenă. Din punct de vedere al stării sufleteşti, triunghiului i se potriveşte cel mai bine galbenul.



Din contra, unghiul obtuz sau arcul de cerc sunt figuri calme, liniştite. Aceeaşi linişte interioară se regăseşte şi la cerc, precum şi la culoarea albastră.



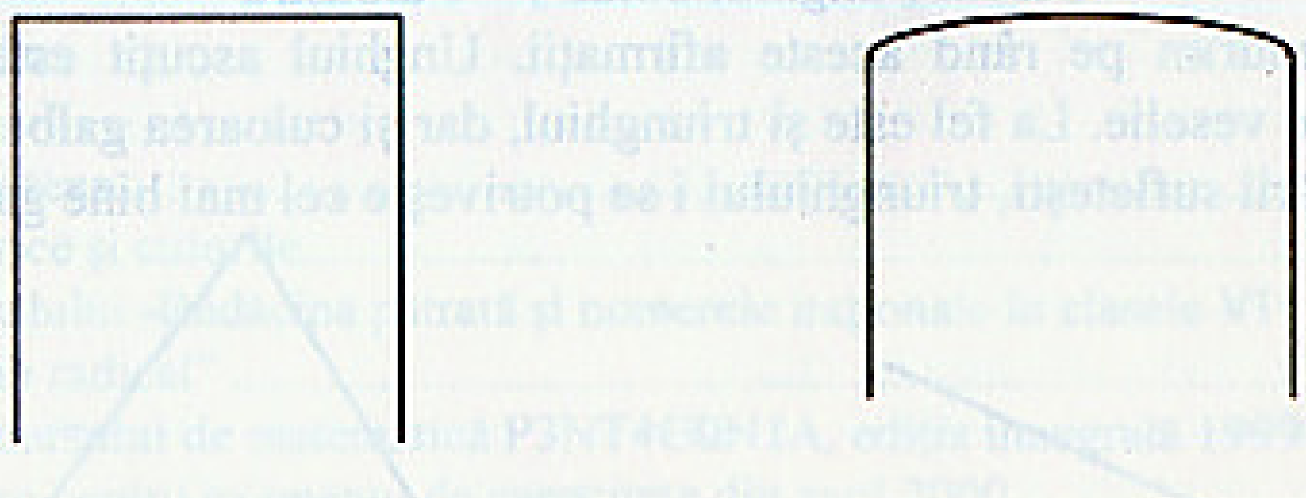
Unghiul drept este un unghi emanând siguranță, perfecțiune greu de egalat. Acesta este vesel dar cu măsură; este cumpătat, dar totuși focos. Aceeași forță și siguranță se regăsește și la pătrat precum și la culoarea roșie.



Cunoscând aceste aspecte ale stărilor sufletești exprimate de figurile geometrice putem înțelege multe din cele ce ne înconjoară. Iată câteva exemple.

Toată lumea cunoaște popularitatea deosebită a vacii Milka. În afară de faptul că reprezintă produse de o calitate de vârf, această vacă are o culoare bine aleasă: lila. Combinația dintre calmul și blândețea vacii, reprezentat de albastru și siguranța unui producător de asemenea proporții, reprezentată prin derivarea albastrului spre roșu, în violet, reprezintă imaginea ideală pentru firma producătoare.

Forța emanată de unghiurile drepte omniprezente în arhitectura blocurilor construite sub regimul comunist, influențată și de cubismul școlii BAUHAUS, deranjează pe durată, creând un stress al unghiului drept.



Această stare de stress poate fi evitată prin introducerea unor unghiuri obtuze sau a unor arce de cerc, ce conferă imediat un aspect mai cald și mai primitor clădirilor sau încăperilor respective.

EXTRAGEREA RADICALULUI RĂDĂCINA PĂTRATĂ ȘI NUMERELE IRAȚIONALE ÎN CLASELE VI - VIII

Mariana Grigorovici și Titus Grigorovici

În urmă cu doi ani (anul școlar 1997 - 1998) am început să ne preocupăm în cadrul Școlii Waldorf din Cluj de optimizarea predării rădăcinii pătrate, după următorii pași:

1) Clasa a VI-a: cunoașterea radicalului ca operație inversă a puterii a doua, cu aplicații doar pe pătratele perfecte;

2) Clasa a VII-a: extragerea radicalului din orice număr pozitiv cu o aproximație dată;

3) Clasa a VIII-a: calculul algebric cu numere iraționale.

Bucuria mare a apărut în anul următor, când manualele alternative, iar apoi programa reformată pentru clasele V - VIII, au luat-o pe același drum ales de noi. Metodica de predare pe noua cale nu este însă clarificată mai deloc, iar argumentele în favoarea sa lipsesc cu desăvârșire. Astfel am luat hotărârea de a vă prezenta rezultatele la care am ajuns în ultimii doi ani în școlile "Eugen A. Pora", Nr. 22 și Waldorf din Cluj. Iată în continuare prezentarea acestei teme așa cum o predăm la ora actuală.

1) În clasa a VI-a elevii trebuie să cunoască această operație, să se obișnuiască cu ideea de "operație de probă" a puterii a doua. Pentru aceasta se va lucra doar pe numere întregi, punându-se accent pe memorarea pătratelor perfecte uzuale (ale numerelor: 0, 1, 2, 3, ...,20, 21, 22, 25, 30, 31, 32, 40, 50, 60, ..., 90, 100 etc.) și pe proba celorlalte ($\sqrt{2025}=45$ pentru că $45\cdot 45=2025$).

În afară de "extragerea" radicalilor prin simpla memorare ($\sqrt{144}=12$ pentru că $12^2=144$), elevii vor învăța în această fază și o metodă mai neobișnuită de găsire a rădăcinii pătrate. Este vorba de o metodă cu aspect primitiv, potrivită acestei faze deoarece obligă copilul la formarea unui adevărat simț al radicalului. Iată această metodă ce permite calculul mintal al rădăcinii pătrate din pătrate perfecte de până la șase cifre.

În primul rând trebuie observat prin câteva exemple succesive că pătratul unui număr de n cifre va avea 2n sau 2n-1 cifre. Invers rădăcina unui număr de 4 cifre va avea 2 cifre; rădăcina unui număr de 5 sau 6 cifre va avea 3 cifre etc.

În al doilea rând ne vom reaminti din clasa a V-a că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 și este dată de ultima cifră a numărului ridicat la pătrat. De exemplu $\sqrt{2209}$ este un număr cu ultima cifră 3 sau 7. Numărul 2507 nu este un pătrat perfect pentru că are ultima cifră 7.

În al treilea rând, elevii vor învăța să aproximeze radicalul, în afara ultimei cifre, astfel: $\sqrt{289}$ se află între $\sqrt{100} = 10$ și $\sqrt{400} = 20$. Deci $\sqrt{289} = 1\_$. Aceasta se poate vedea foarte ușor punând de o parte ultimele două cifre și căutând cel mai mare pătrat perfect ce intră în numărul rămas (începutul cunoscut al algoritmilor din manuale).

Combinând cele trei observații, vom găsi radicalul $\sqrt{3364}$ astfel:

Pasul I: separăm unitățile și zecile: $\sqrt{33'64}$;

Pasul II: pătratul cel mai mare care intră în 33 este 25, deci prima cifră a rezultatului este 5;

Pasul III: ultima cifră a lui 3364 este 4, deci ultima cifră a rezultatului poate fi 2 sau 8;

Înseamnă că $\sqrt{3364} =$ 52 sau 58

Urmează înmulțirile de probă $52 \cdot 52 = 2704$ și $58 \cdot 58 = 3364$, deci $\sqrt{3364} = 58$.

Cu timpul elevii vor observa că 3364 este mai aproape de 3600 decât de 2500 și vor încerca întâi proba cu 58.

Exercițiile vor evolua spre numere de 5 sau 6 cifre astfel:

$\sqrt{309'76}$ are ultima cifră 4 sau 6, iar la început 17 pentru că $17^2 = 289 < 309 < 324 = 18^2$. Deci $\sqrt{309'76} = 174$ sau 176. Făcând cele două probe găsim că 176 este rezultatul corect.

$\sqrt{1011'24} = 31\_$ pentru că 1011 este între 961 și 1024. Ultima cifră poate fi 2 sau 8, mai probabil 8. După probă $\sqrt{101124} = 318$.

Este evident că metoda funcționează numai în cazul pătratelor perfecte, dar prezintă două mari avantaje. În primul rând obișnuiește elevul să gândească pe operația de rădăcină pătrată, fără a-l introduce din prima într-un algoritm de neînțeles. În al doilea rând le place mult elevilor, reprezentând o armă importantă împotriva celor doi mari dușmani ai gândirii matematice libere: calculatorul de buzunar ("nu am crezut că pot calcula în cap cu așa numere mari") și televizorul ("în loc să mă uit la televizor, ieri l-am învățat toată ziua pe tata radicali").

O întrebare ce poate fi lămurită din clasa a VI-a este și proveniența semnului $\sqrt{\ }$ și a cuvântului "radical". Denumirea provine de la latinescul "radix" (rădăcină) iar $\sqrt{\ }$ este un r (de la radix) evoluat de-a lungul anilor.

2) În clasa a VII-a urmează calculul aproximativ al rădăcinii pătrate din orice fel de numere pozitive, inclusiv din cele care nu sunt pătrate perfecte. Algoritmul arhicunoscut de extragere a radicalului are însă un mare defect, anume că se prezintă copilului ca o grămadă de calcule complicate fără nici un sens aparent, ca o adevărată cutie neagră. Faptul că elevii nu pot înțelege de ce se fac aceste calcule generează o neîncredere față de rezultatele obținute, încercarea de a convinge prin același rezultat obținut pe un calculator de buzunar întărind numai efectul de cutie neagră.

Putem combate această neîncredere prezentându-le elevilor următorul calcul pentru $\sqrt{2}$. Luăm la început un exemplu mai accesibil și anume $\sqrt{36}$. Presupunând că nu cunoaștem că $\sqrt{36} = 6$, căutăm un număr n pentru care $36 = n \cdot n$ sau $36 : n = n$. Dacă împărțim la alt număr decât n obținem $36 : a = b$ sau $36 = a \cdot b$ cu $a \neq b$. Evident n este înte a și b.

Să luăm $a = 5$. Avem $36 : 5 = 7{,}2$ sau $36 = 5 \cdot 7{,}2$. Numărul căutat n este între 5 și 7,2. Fie media aritmetică a acestor numere $m = (5 + 7{,}2) / 2 = 6{,}1$. Acesta ar putea fi n. Să facem proba prin împărțire $36 : 6{,}1 \cong 5{,}9$. Cele două numere a și b s-au apropiat dar încă nu sunt egale. Luăm din nou media aritmetică $m = (6{,}1 + 5{,}9) / 2 = 6$. Acesta ar putea fi n. Facem proba și obținem $36 : 6 = 6$ sau $36 = 6 \cdot 6$. Deci $\sqrt{36} = 6$.

Acest procedeu poate fi folosit pentru calculul aproximativ al rădăcinii pătrate din orice număr pozitiv. Iată exemplul pe $\sqrt{2}$.

Pentru $\sqrt{2} = \sqrt{2{,}00}$ avem o primă aproximare (prin lipsă) $\sqrt{2} = 1{,}4$ pentru că $1{,}4^2 = 1{,}96$ ($14^2 = 196$). Efectuăm împărțirea $2 : 1{,}4 \cong 1{,}42$ sau $2 \cong 1{,}4 \cdot 1{,}42$. Deci $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Luăm pentru $\sqrt{2}$ media aritmetică $m_1 = (1{,}4 + 1{,}42) / 2 = 1{,}41$, deci $\sqrt{2} \cong 1{,}41$. Efectuăm o nouă împărțire $2 : 1{,}41 \cong 1{,}418$ sau $2 \cong 1{,}41 \cdot 1{,}418$. Deci $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}418$. Luăm pentru $\sqrt{2}$ media aritmetică $m_2 = (1{,}41 + 1{,}418) / 2 = 1{,}414$, deci $\sqrt{2} \cong 1{,}414$. Reluăm de la capăt cu o nouă împărțire $2 : 1{,}414 \cong 1{,}4144$ sau $2 \cong 1{,}414 \cdot 1{,}4144$. Deci $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}4144$. Luăm pentru $\sqrt{2}$ media aritmetică $m_3 = (1{,}414 + 1{,}4144) / 2 = 1{,}4142$, deci $\sqrt{2} \cong 1{,}4142$. Procedeul poate fi repetat în continuare, obținând cu fiecare nou pas încă o zecimală exactă a lui $\sqrt{2}$.

Această metodă, care se va numi în liceu metoda cleștelui, este destul de complicată, elevii primind astfel o mostră despre cum trebuie să se fi chinuit matematicienii de-a lungul timpului pentru cunoașterea acestor numere. Este însă foarte important să-i obișnuim de mici că totul poate fi înțeles și să nu " înghită" ceva doar pentru că așa a spus profesorul.

Încercăm aici să educăm gândirea liberă, debarasându-ne de educația comunistă care cerea oamenilor exact opusul: "voi să nu gândiți ci doar să executați". Astfel se urmărea antrenarea tuturor încă din băncile școlii pentru a fi supuși și a accepta fără comentarii și întrebări orice ordin și indicație venite de "sus".

Desigur metoda prezentată mai sus nu va înlocui algoritmul clasic, fiind destul de anevoioasă, dar îl va învăța pe elev că orice poate fi gândit.

Urmează învățarea algoritmului clasic de extragere a rădăcinii pătrate, numerele pe care se va aplica radicalul evoluând în ordinea următoare:

(1) Numere naturale pătrate perfecte mari, pentru înțelegerea algoritmului ($\sqrt{42614784} = 6528$);

(2) Numere raționale pătratice, pentru înțelegerea calculului în partea zecimală ($\sqrt{973{,}44} = 31{,}2$);

(3) Numere raționale, cu calculul a trei - patru zecimale exacte ($\sqrt{69{,}2345} = 8{,}3207...$ sau $\sqrt{69{,}2345} \cong 8{,}3207$);

(4) Numere naturale nepătratice, cu calculul aproximativ cu o exactitate dată ($\sqrt{2} \cong 1{,}414$).

La punctele (3) și (4) apare pentru prima dată ideea că aceste numere au o infinitate de zecimale care nu se repetă periodic. Pentru clasa a VII-a, studiul iraționalității se oprește însă aici. Este foarte important ca elevii să lucreze cel puțin un an în forma aproximativă a numerelor iraționale, pentru a simți cât mai bine mărimea acestor numere, chiar și în forma aproximativă. Apariția în formă aproximativă și folosirea ca atare a numărului $\pi \cong 3{,}14$ va ajuta și mai mult la formarea noțiunii de număr irațional.

Și în aplicațiile de la teorema lui Pitagora se va lucra la început cu pătrate perfecte - numere pitagorice (3; 4; 5), (6; 8; 10) sau (5; 12; 13). (vezi P3NT4G0N1A nr.3 - dec. 1998), apoi urmând aplicațiile iraționale. De exemplu înălțimea unui triunghi echilateral de latură 6 cm va fi h = $\sqrt{36-9} = \sqrt{27} \cong 5{,}196$ sau h $\cong$ 5,2 cm (aproximație prin adaos). Elevii vor înțelege astfel că $\sqrt{27}$ este aproximativ 5,2, dar că acest număr nu poate fi calculat cu exactitate.

În paralel cu calculul aproximativ al radicalilor, apar și formulele $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ și $\sqrt{a:b} = \sqrt{a}:\sqrt{b}$ care deschid calea spre scoaterea factorilor de sub radical. La sfârșitul clasei a VII-ea, cele două metode, cea aproximativă și cea exactă, bazată pe descompunerea în factori primi, sunt aplicate alternativ.

3) În clasa a VIII-a urmează un studiu mult mai profund al numerelor iraționale, bazat pe gândirea algebrică ce începe să capete o formă clară la majoritatea elevilor.

Calculul exact prin scoaterea factorilor de sub radical devine metoda general utilizată, apelându-se doar ocazional la calculul aproximativ.

Raționalizarea simplă sau cu conjugatul, cât și adunările și scăderile de forma $2\sqrt{18} - 3\sqrt{8} = 2 \cdot 3\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0$ sunt tot atâtea exemple de gândire algebrică folosită în calculul, de data acesta exact, cu radicali.

Punctul culminant în acest sens îl reprezintă exercițiile de calcul cu fracții iraționale și care se rezolvă în același mod ca exercițiile similare cu fracții algebrice:

a.) $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x}{x^2-1}$

b.) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1}\right) : \frac{\sqrt{5}}{4}$

O întrebare reapare însă obsesiv din partea elevilor: "...și totuși, calculând pe $\sqrt{2}$, chiar nu se termină zecimalele sale?". Răspunsul la această întrebare este binevenit acum când elevii au capacitatea de a gândi în profunzime această problemă.

Demonstrarea prin metoda reducerii la absurd a iraționalității lui $\sqrt{2}$ este cunoscută din manuale. Iată o variantă relativ diferită a acestei demonstrații, variantă ce v-am prezentat-o prima dată în caietul nr.2 P3NT4G0N1A.

Presupunând că $\sqrt{2}$ este un număr rațional, reprezentat în cazul de față prin fracția ireductibilă m/n; m,n $\in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Să studiem în continuare ultima cifră a numerelor m^2 și $2n^2$.

Astfel, ultima cifră a lui m^2 poate fi: 0; 1; 4; 5; 6 sau 9. La fel, se vede că ultima cifră a lui $2n^2$ poate fi 0; 2 sau 8.

Egalitatea $m^2=2n^2$ poate fi îndeplinită doar dacă ultima cifră este 0.

Dacă $u(m^2) = 0 \Rightarrow u(m) = 0 \Rightarrow m \vdots 10 \Rightarrow m \vdots 2$ și $m \vdots 5$. (1)

Dacă $u(2n^2) = 0 \Rightarrow u(n^2) = 0$ sau $5 \Rightarrow u(n) = 0$ sau $5 \Rightarrow n \vdots 5$. (2)

Din afirmațiile (1) și (2) observăm că fracția m/n se poate simplifica prin 5, ceea ce intră în contradicție cu ireductibilitatea presupusă inițial. Din această contradicție putem trage concluzia că $\sqrt{2}$ nu este un număr rațional, adică nu poate fi scris sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții periodice.

O altă datorie rămasă din clasa a VII-a este argumentarea pașilor din algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate. Prezentarea pe un simplu exemplu va lămuri elevii asupra acestor calcule întărind totodată convingerea că, pentru o minte deschisă, cutiile negre nu există.

Pentru înțelegerea acestui algoritm vom studia, pentru început, ridicarea la pătrat a unui număr natural de două cifre.

$$\begin{array}{rcrcl} \underline{35\cdot 35} & & \underline{35\cdot 35} & & \\ 175 & = & 25 & = 5\cdot 5 = 5^2 & \\ & & 150 & = 5\cdot 30 & = 2\cdot 5\cdot 30 \\ 105 & = & 150 & = 30\cdot 5 & \\ & & \underline{900} & = 30\cdot 30 = 30^2 & \\ \overline{1225} & & 1225 & & \end{array}$$

Cu alte cuvinte, $35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2\cdot 30\cdot 5 + 5^2 = 1225$. Deci $1225 = 900 + \ldots$ sau $\sqrt{1225} = 30 + \ldots$. Diferența dintre pătratele 1225 și 900 este $325 = 2\cdot 30\cdot 5 + 5^2 = (2\cdot 30 + 5)\cdot 5$.

Cum apar acestea în algoritm? Pătratul 900 apare ca un 9 sub cifra sutelor a lui 1225. Rădăcina sa, 30 apare la rezultat sub formă de 3 ce va fi urmat ulterior de cifra unităților; $2\cdot 30$ reprezintă coborârea dublată a lui 3, la zona de calcul sub formă de 6. Acestuia îi vom atașa o cifră (5) cu care vom și înmulți numărul rezultat ($65\cdot 5 = 325$). Pe 5 l-am găsit împărțind aproximativ 32 (325 fără ultima cifră) la 6 (dublatul lui 3). Vă prezentăm alăturat algoritmul de extragere a lui $\sqrt{1225} = 35$, înainte de finalizarea sa.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12'25} & 30 \\ \hline \underline{900} & \downarrow\cdot 2 \\ 32\underline{5} & 65\cdot 5 = 325 \end{array}$$

Așa cum la radicalul din pătratul unui număr de două cifre se folosește formula: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)\cdot b$,
cu a = zecile și b = unitățile numărului, tot așa la radicalul din pătratul unui număr de trei cifre se folosește formula:
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + (2a+b)\cdot b + [2(a+b)+c]\cdot c$,
cu a = sutele, b = zecile și c = unitățile numărului.

Nu vom încheia înainte de a aminti și de radicalii suprapuși. Pentru clasa a VIII-a recomandăm a nu se prezenta elevilor formula de calcul a acestora, ci de a-i învăța să gândească rezultatul pe baza formulei pătratului binomului, astfel:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\underbrace{3}_{a^2} \underbrace{-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}_{-2ab} \underbrace{+1}_{+b^2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\underbrace{\sqrt{3}-1}_{>0}| = \sqrt{3}-1$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Mai rămân de clarificat în liceu numerele complexe, ca rădăcină pătrată a numerelor negative și rădăcinile de ordin superior lui 2. Acestea merită prezentate prin exemple simple chiar din clasa a VIII-a, fără a intra în amănunte sau operații cu ele.

*

"SCOATEREA DE SUB RADICAL"

În caietul precedent vă prezentam o metodă greșită de simplificare a fracțiilor, metodă care dădea însă, în mod surprinzător rezultate corecte.

Iată în continuare o metodă originală de scoatere de sub radical:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

Metoda este desigur greșită, dar surprinzător, la verificare răspunsul se dovedește corect:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5\cdot 24+5}{24}} = \sqrt{\frac{125}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

Oare se pot scrie și alte astfel de scoateri de sub radical? Pentru a compune alte exerciții similare căutăm perechea de numere naturale a și b cu proprietatea:

$\sqrt{a\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab+a}{b}}$ care să fie egal cu $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

Trebuie ca $ab + a = a^3 \;:a \Rightarrow b + 1 = a^2 \Rightarrow b = a^2 - 1$.

Astfel, dacă luăm $a = 4 \Rightarrow b = 15$ și avem $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$.

La fel putem obține:

$$\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}};\quad \sqrt{7\frac{7}{48}} = 7\sqrt{\frac{7}{48}} \text{ etc.}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ P3NT4G0N1A

În data de 16 octombrie 1999 a avut loc ediția inaugurală a Concursului de Matematică P3NT4G0N1A. La această primă ediție au participat elevii din clasele a VIII. de la școlile "Eugen A. Pora", Nr.7 și Waldorf din Cluj. Primele locuri au fost ocupatede următorii elevi: **Deac Flavia** (Școala nr. 7) - **locul I.**, **Riți -Mihoc Emanuela -Ioana** ("Eugen A. Pora") - **locul al II-lea**, **Bere Diana** (Waldorf) - **locul al III-lea**, **Fekete Andreea-Daniela** ("Eugen A. Pora") și **Szabados Zoltan** (Waldorf) - **mențiuni.**

Succesul acestei activități s-a bazat pe faptul că, în organizarea concursului, stabilirea momentului și redactarea subiectelor, am ținut seama de câteva aspecte psihopedagogice esențiale. Iată-le pe scurt:

La începutul clasei a VIII-a este timpul să fie luată în serios pregătirea ordonată pentru examen. Mobilizarea pentru această pregătire poate fi făcută cu succes printr-un concurs interșcolar.

La sfârșitul clasei a VII-a sau la începutul clasei a VIII-a se observă la foarte mulți elevi un moment de deșteptare, aceștea începând să cuprindă și să înțeleagă într-adevăr matematica. Acest moment de trezire matematică poate apărea doar după ce copilul trece din stadiul operațiilor concrete la stadiul operațiilor propoziționale, fiind capabil să raționeze asupra propozițiilor sau enunțurilor verbale ca atare. Psihologii situează acest moment în jurul vârstei de 14 ani (vezi "Introducere în psihologia contemporană", I. Radu, M. Miclea și alții, editura "Sincron" Cluj, 1991). Concursurile obișnuite, înainte de acest moment, verifică în general doar capacitatea elevilor de a-și însuși cât mai multe rezolvări, mai puțin gândirea matematică evoluată.

Un alt motiv în favoarea acestui concurs este următorul: lăsând o perioadă de uitare după clasa a VII-a, în vacanța mare, odată recapitulată materia la începutul clasei a VIII-a, cunoștințele revin cu o forță mult crescută. Luna octombrie din clasa a VIII-a este potrivită astfel unei prime încercări a forțelor matematice.

Pe lângă aceste aspecte ce țin mai mult de psihologie, am mai luat în considerare și următorul motiv: olimpiadele de matematică au ajuns la un grad de dificultate atât de ridicat, încât chiar și dintre copii cu înclinații matematice evidente, puțini mai fac față, majoritatea întorcându-se cu note mici și decepționați de la concurs. Pentru a evita acestă decepție, mulți profesori "îi îndoapă" efectiv cu probleme grele pe săracii elevi, unii parcurgând chiar în avans materia pentru a fi "mai pregătiți" în vederea olimpiadei.

Măsura cea mai logică ar fi însă ca exercițiile și problemele date la concurs să coboare la un nivel accesibil elevilor. Subiectele trebuie astfel concepute încât elevii buni să nu coboare sub nota 5, pentru a le fi încurajată munca și pasiunea. Concursul trebuie să le aducă bucurie și nu deprimare.

În consecință, subiectele la concursul nostru au fost astfel concepute încât elevii buni să poată trece de nota 5. Exercițiile și problemele au fost alese în mare parte din cele deja publicate în caietele P3NT4G0N1A, apărând însă și noutăți. Subiectele au fost ordonate după modelul examenului de capacitate, nivelul fiind însă mai ridicat. Primele nouă exerciții au primit câte 0,5 puncte, iar ultimele trei câte 1,5 puncte. Vă prezentăm în continuare testul integral, cu recomandarea de a fi inclus în pregătirea examenului din acest an.

PARTEA I.

1. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 5x+2y=4 \\ x=3y+11 \end{cases}$.
2. $\frac{16}{81}-\frac{16}{81}\cdot\frac{9}{4}:\frac{4}{9}=$ ________.
3. Rezovați ecuația: $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot(2x-4)=11x-\frac{2}{3}x-8$.
4. Un romb are diagonalele de 48 mm, respectiv 64 mm. Calculați aria și perimetrul rombului.
5. $\frac{8^2\cdot3^7\cdot5^4\cdot2^4}{9\cdot(2^4)^2\cdot5^3\cdot3^6}=$ ________.
6. $7738\cdot437-5739\cdot437+1999\cdot563=$ ________.
7. Patrulaterul ABCD are măsurile unghiurilor proporționale cu numerele 3; 5; 7; și 15. Arătați că acest patrulater este un triunghi.
8. Un bou legat de un par cu o funie de 8 m paște iarba din jurul parului în 8 ore. În câte ore paște iarba dacă înjumătățim sfoara?
9. În triunghiul ABC cu $AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AC=\frac{a\sqrt{6}}{6}$, găsește lungimea înălțimii [CD].

PARTEA a II-a.

10. Într-o epigramă aritmetică de la 1340 d. Chr. găsim numărul discipolilor lui Pitagora astfel: o jumătate făceau matematică, un sfert științele naturii, o șeptime exersau arta tăcerii și mai erau trei femei.
    a) Câți discipoli avea Pitagora în total?
    b) Câți erau bărbați și câți exersau arta tăcerii?

11. Triunghiul ABC are $m(\angle A) = 90^0$, $m(\angle C) = 15^0$ şi $BC = 8$ cm.
    a) Construiţi figura exact;
    b) Aflaţi lungimea medianei [AM];
    c) Ce lungime are înălţimea [AD]?
12. O ciocolată Poiana costă 8.000 lei, iar o sticlă de Coca Cola 16.000 lei.
    a) Cât costă cinci ciocolate?
    b) Irina are o bancnotă de 50.000 lei din care cumpără două ciocolate şi o sticlă de Coca Cola. Câţi lei primeşte rest?
    c) Preţul unei ciocolate se măreşte cu 20 %, iar al unei sticle de Coca Cola se micşorează cu 15 %. Emiluş face mai multe pachete, în fiecare punând în total 7 ciocolate şi sucuri. Dacă fiecare pachet conţine cel puţin două ciocolate şi cel puţin un suc, care este cea mai mică valoare a unui pachet? Dar cea mai mare valoare?

*

TESTE PREGĂTITOARE PENTRU EXAMENUL DE CAPACITATE 2000

EDIŢIA A II-A

În martie 1999 caietele de matematică P3NT4G0N1A ofereau primele teste pentru pregătirea examenului de capacitate. Ca urmare a succesului neobişnuit al acestor teste ne-am propus să le reluăm într-o formă îmbunătăţită şi extinsă. Astfel, o mare parte din probleme, mai ales cele de geometrie plană au fost incluse in prima parte a acestor teste, din numărul 5 al caietelor P3NT4G0N1A. Restul problemelor valoroase se regăsesc în partea a doua cuprinsă în acest nou caiet. Pe lângă acestea am cuprins în testele de faţă şi alte probleme şi exerciţii importante şi atractive.

Deoarece geometria plană a fost dominantă în primele 24 teste ale recapitulării, aceasta ocupă în caietul de faţă un procent mai redus. Materia a fost astfel ordonată încât să putem continua pregătirea de la începutul semestrului al II-lea fără a fi incomodaţi în primele teste de probleme din lecţii neparcurse. Testele sunt structurate după modelele oferite de M.E.N., conform programei pentru examenul de capacitate din anul 2000. Punctarea este cea deja cunoscută: problemele şi exerciţiile din prima parte primesc câte 5 puncte, iar cele din partea a doua câte 15 puncte. Din oficiu se acordă 10 puncte. La un punctaj de 85 puncte nota obţinută este 8,5. În prima parte se punctează doar răspunsurile, pe când în a doua parte şi rezolvările sau demonstraţiile.

TEST 1

PARTEA I.

1. Suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 2000$ este egală cu ____________
2. Un patrulater cu două laturi paralele şi congruente se numeşte ____________
3. Dacă latura unui cub se măreşte cu 100 % atunci volumul său se măreşte cu ________ %.
4. Se amestecă 20 kg prune de 8000 lei/kg cu 5 kg gutui de 18000 lei/kg şi cu 15kg zahăr de 9000 lei/kg. Cât costă 1 kg de amestec pentru gem?
5. $(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2}) + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} =$ ____________
6. Descompuneţi în factori expresia $BMX + MB =$ ____________
7. Calculaţi $\frac{16}{81} - \frac{16}{81}\cdot\frac{9}{4}:\frac{4}{9} =$ ________
8. Descompuneţi $P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1 =$ ____________
9. Perimetrul unui dreptunghi este 260 m. Dacă micşorăm lungimea cu 30 m şi mărim lăţimea cu 20 m aria dreptunghiului nu se schimbă. Dimensiunile drepunghiului iniţial sunt: lungimea ____________ şi lăţimea ____________.

PARTEA a II-a.

10. La un magazin preţul de vânzare al unei pălării a fost redus cu o treime la 45000 lei. Dacă proprietarul magazinului şi în acest caz mai are un profit de 25 %, calculaţi preţul pălăriei şi profitul în procente înaintea ieftinirii.
11. Se dă expresia : $\frac{x^4 - y^4}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^3 + xy^2}{x + y}$.
    a) Să se aducă la forma cea mai simplă;
    b) Să se calculeze valoarea numerică pentru
    $$x = \left(1,75:\frac{2}{3} - 1,75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{16} \quad \text{şi} \quad y = \frac{8}{5}\cdot\sqrt{\frac{225}{4096}}.$$
12. Fie ABCD un patrulater ortodiagonal ($AC \perp BD$).
    a) Arătaţi că aria sa este egală cu semiprodusul diagonalelor.
    b) Cunoscând AD = 60 cm, BC = 25 cm, OD = 36 cm şi OB = 20 cm, O fiind intersecţia diagonalelor, calculaţi lungimile laturilor şi ale diagonalelor sale.
    c) Calculaţi perimetrul şi aria patrulaterului ABCD.