Ce trebuie să conțină un set de teste pentru pregătirea examenelor de CAPACITATE și de admitere în LICEE? Nimic mai simplu:

- exerciții și probleme cât mai simple (doar nu mergem la olimpiadă) și totuși:
- exerciții și probleme destul de complicate pentru a nu fi luați prin surprindere la examen de vreo problemă mai grea;
- teste cât mai puține pentru a putea să le ducem la bun sfârșit, și totuși
- un număr suficient de teste care să asigure o pregătire corespunzătoare a examenelor;
- ordonarea materiei în teste astfel încât să putem porni pregătirea imediat, fără a fi incomodați în primele teste de probleme din lecții neparcurse;
- exerciții și probleme în ton cu noua orientare a Ministerului Educației Naționale;
- teste structurate după modelele oferite de M.E.N.
- exerciții și probleme clasice cu probabilitate mare de a fi incluse în subiectele de examen, dar și:
- exerciții și probleme inedite cu ajutorul cărora ne putem antrena pentru diferite situații – surpriză oferite la examene.

Toate acestea le găsim laolaltă numai în aceste caiete de matematică PENTAGONIA.

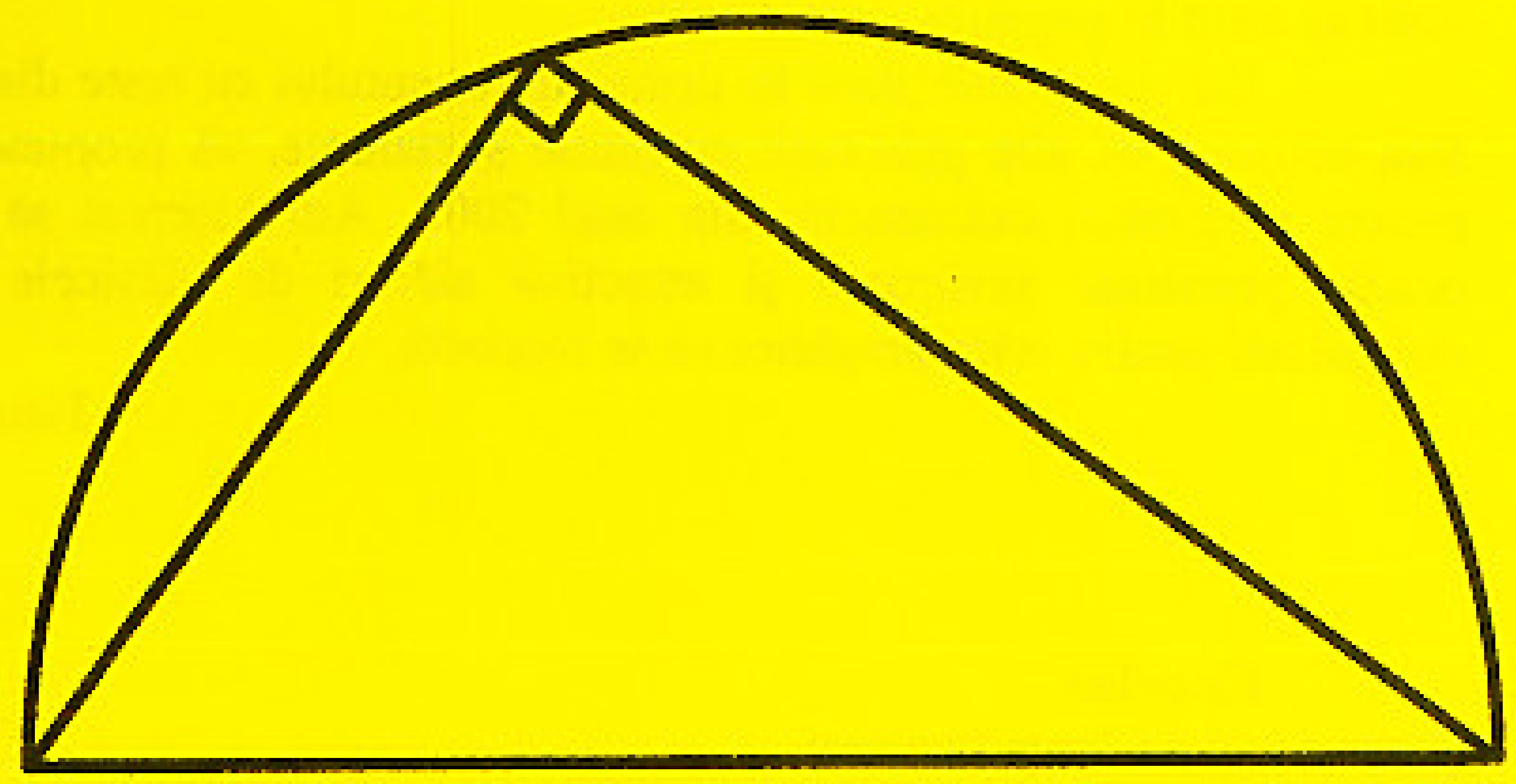
ISBN: 973 – 9196 – 07 – 1
EDITURA TRIADE 1999

P3NT4GON1A

TESTE PREGĂTITOARE PENTRU EXAMENELE DE CAPACITATE ȘI ADMITERE ÎN LICEU DIN ANUL 2000.

NUMERELE DE-A LUNGUL ISTORIEI

TEOREMA LUI THALES.



CAIETE SEMESTRIALE
DE MATEMATICĂ
NUMĂRUL 5 SEPTEMBRIE 1999

Matematica eclipsei

Iată că reuşim să ne reînâlnim, după această cea mai mică vacanţă mare, în care am dat şi primul examen de capacitate şi în care toate discuţiile s-au învârtit în jurul eclipsei totale, la propriu şi la figurat.

Dar senzaţionalul nu se termină aici. Suntem la începutul unui an şcolar deosebit, ce aduce mult aşteptata reformă a matematicii şcolare, cu o multitudine de schimbări binevenite în direcţia accesibilizării acestei materii. Lipsesc deocamdată argumentările acestor schimbări, care ar fi uşurat mult activitatea dascălilor.

Dintre noutăţile pozitive aş aminti doar câteva: mai multe demonstraţii, inclusiv cu arii, pentru teorema lui Pitagora (vezi PENTAGONIA nr. 1 şi 2); folosirea numerelor iraţionale, într-o primă etapă, în clasa a VII – a doar în formă aproximativă, calculul algebric cu aceste numere venind în clasa a VIII – a; elemente de geometrie analitică în clasa a VII – a (vezi PENTAGONIA nr. 3); scoaterea metodei grafice de rezolvare a sistemelor de ecuaţii din clasa a VII – a; introducerea unor corpuri la începutul studiului geometriei în spaţiu; eliminarea capitolului "Polinoame" şi mutarea funcţiilor în semestrul al II –lea; reintroducerea ecuaţiilor de gradul II.

O singură excepţie deranjează bunul gust al acestei reforme: mutarea capitolului despre operaţii cu fracţii ordinare din clasa a V – a în a VI – a, fracţiile zecimale rămânând însă pe loc. Total neinspirată mutare, pe care mulţi profesori o vor face doar pentru că " aşa cere noua programă".

Nu apar, în schimb, mutări de mult necesare în programa românească de matematică. O astfel de schimbare ar reprezenta-o teorema lui Thales, despre care vă invit să citiţi în paginile acestui caiet.

Cu concluziile trase în urma suplimentului cu teste din luna Martie, fără a ne lăsa eclipsaţi de alte publicaţii cu nume şi renume, vă propunem un nou set de teste pentru pregătirea examenelor din anul 2000. Am încercat să adunăm şi cu această ocazie probleme savuroase şi atractive alături de clasicele exerciţii şi probleme obligatorii pentru orice pregătire ce se respectă.

Titus Grigorovici

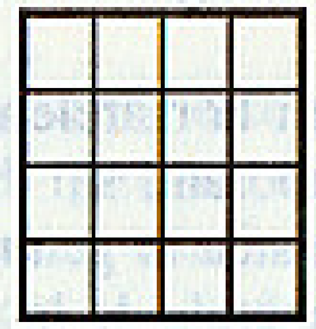
Cuprins

Numerele de-a lungul istoriei

Activităţile legate de numere au fost dintotdeauna o preocupare specific omenească. Medicul şi filosoful arab AVICENNA (~ 1000 D. Chr.) spunea astfel: "Bruta non numerant" (animalele nu numără). Aici apare o prăpastie de netrecut între oameni şi animale: numai omul numără şi socoteşte.

De-a lungul istoriei numerele nu au fost însă folosite doar la socotit. Multe numere aveau în diferite culturi anumite semnificaţii mistice. Gândindu-ne astăzi din acest punct de vedere, în afară de numărul ghinionist 13, mare lucru nu mai putem spune. Alta era însă situaţia în antichitate.

Să luăm spre exemplificare numărul 17. Faţă de acesta, pitagoreicii aveau o adevărată repulsie, pentru că se afla între numărul 16, ca pătrat perfect, şi numărul 18, ca dublu de pătrat perfect, cele două numere fiind singurele cu proprietatea că perimetrul figurilor corespunzătoare este egal cu aria acestora:



A = 4 x 4 = 16
P= 4 + 4 + 4 + 4 = 16

A = 3 x 6 = 18
P = 3 + 6 + 3 + 6 = 18

Astfel, numerele 16 şi 18 se bucurau la vechii greci de o mare strălucire. Între ele se afla ca un perete despărţitor deranjant, numărul 17. Pe acesta, pitagoreicii îl numeau ANTIPHRAXIS.

Creştinismul, în schimb, a acordat acestui număr mari onoruri. Astfel, acesta poate fi găsit unde ne-am aştepta mai puţin, anume în Evanghelia după Ioan, în capitolul 21, unde este relatată a treia arătare a lui Iisus după înviere, la Marea Tiberiadei:

"Iisus le-a zis: <<Aduceţi din peştii pe care i-aţi prins acum>>

Simon Petru deci s-a suit în corăbioară şi a tras plasa la ţărm, plină cu o sută cincizeci şi trei de peşti mari; şi deşi erau aşa de mulţi, plasa nu s-a rupt.

Iisus le-a zis: <<Veniţi de prânziţi.>>. Dar nici unul dintre ucenici nu îndrăznea să-L întrebe: << Tu cine eşti? >> ştiind că este Domnul ... "

De ce exact acest număr de peşti? Răspunsul ni-l dă Toma d'Aquino (1225 – 1274 d. Chr.) în a sa CATENA AUREA (Lanţul de aur): numărul 153 este suma tuturor numerelor de 1 la 17.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 15 + 16 + 17 = 153.$$

Totodată 17 este compus din 10, numărul perfecțiunii, și 7, numărul revelației. În 17 se întâlnesc cerescul (numărul 10) și pământescul (numărul 7), acesta fiind dovada că omul are parte de ambele lumi, cea cerească și cea pământească. Totodată numărul 1 reprezintă Creatorul iar 7 reprezintă pe cei 7 diaconi aleși de Sfinții Apostoli.

O altă pereche deosebită o formează numerele 10 și 55. Astfel, părerea înțelepților din timpurile străvechi era că în primele zece numere este cuprinsă întreaga umanitate. Peste primele zece numere corespunzând celor zece porunci, omul nu trebuia să tânjească. Ar fi depășit astfel zona ce i-a fost rezervată intrând în domeniul forțelor răului și a violenței. Sf. Martin caracterizează această situație adunând primele zece numere:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

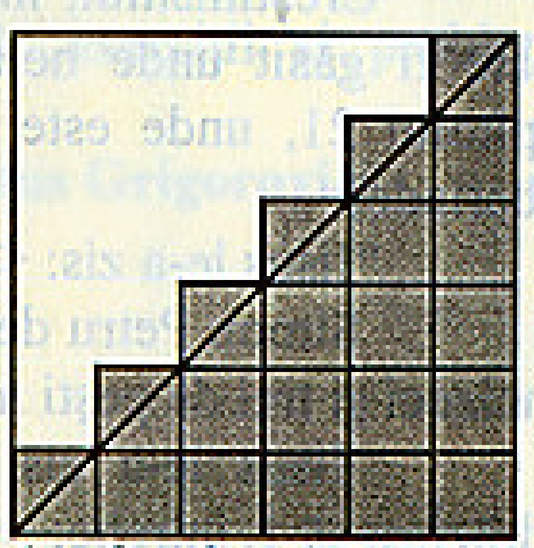
Această adunare se numește o adunare în sensul înțelepciunii divine. Astfel numărul 55 reprezintă limita umanității. Iarăși apare în imagine numărul 10 prin doi de 5 alăturați.

Depășirea acestei granițe a umanității și trecerea la numărul 56 este caracterizată de Sf. Martin astfel: "Legea sa este groaznică și vai de cei care îi ies în cale".

Făcând un salt uriaș în timp, ajungem la marele matematician Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), supranumit de contemporanii săi "Princeps mathematicorum". Acesta, elev fiind, a fost pedepsit într-o zi să stea în genunchi pe grăunțele din colțul clasei, până când va aduna în minte toate numerele de la 1 la 100. Până s-apuce a se așeza bine în genunchi micul Carl avu deja răspunsul: 5050. Iată cum a reușit să facă acest calcul atât de repede: a lăsat suta de-o parte, apoi a adunat 1 + 99 = 100, 2 + 98 = 100; ... ; 49 + 51 = 100 ; rămânând izolat 50. "În total avem de 50 de ori 100 și încă 50, adică 50 x 100 + 50 = 5050", răspunse Gauss scăpând rapid de groaznica pedeapsă.

Iată că am ajuns pe neobservate la o temă obligatorie pentru orice elev al zilelor noastre: suma primelor n numere naturale, $S_n = n(n + 1)/2$. Dintre multele demonstrații existente, la nivel de gimnaziu sau liceu, una se evidențiază prin metoda folosită: calculul de arii.

Suma 1 + 2 + 3 + ... + n este reprezentată prin suprafața hașurată din figura alăturată. Aceasta este compusă dintr-o jumătate a pătratului mare de latură n și din n jumătăți de pătrățele unități.



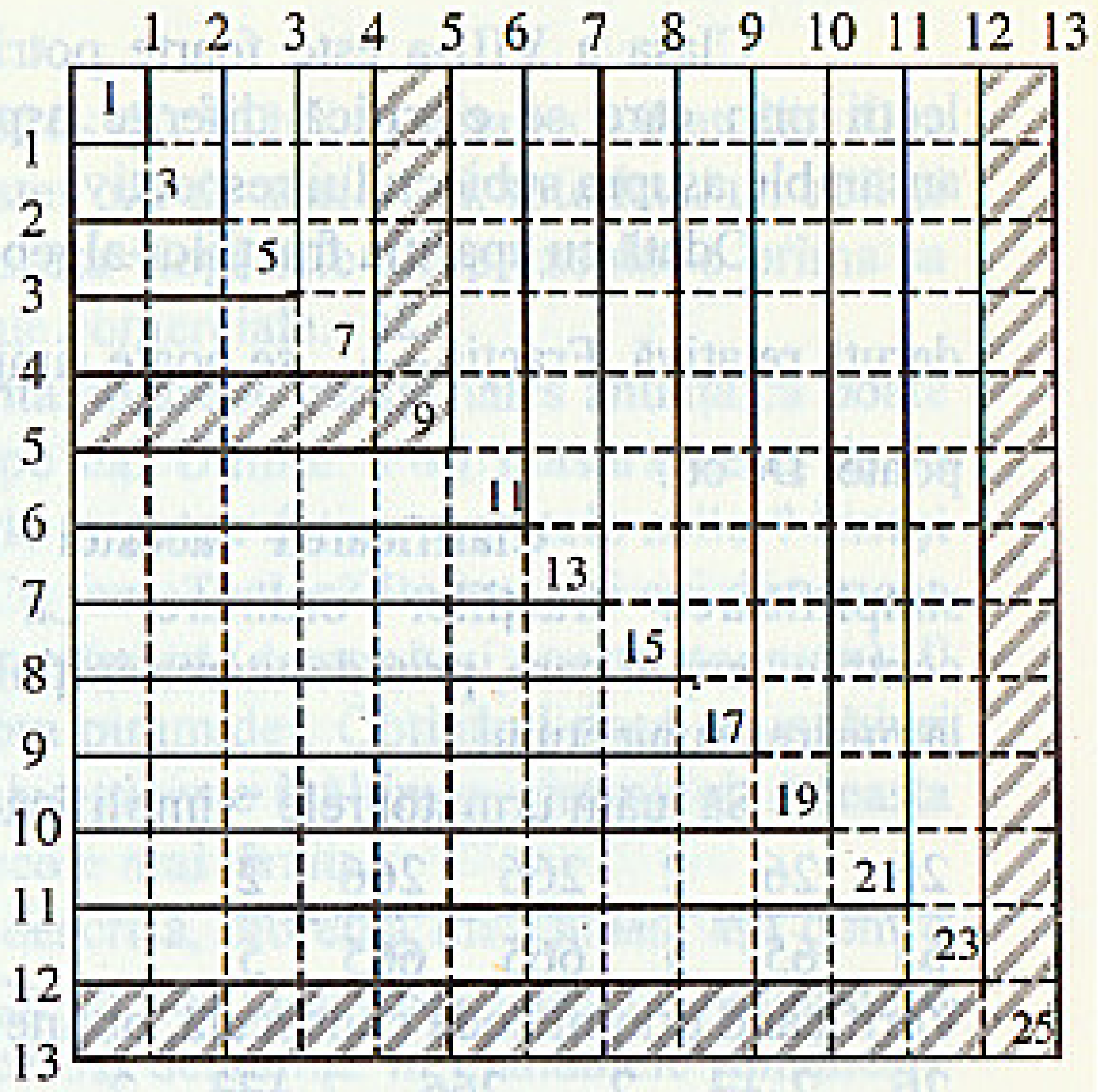
1 + 2 + 3 + 4 + ... + n

Astfel avem:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Să ne întoarcem la începuturile matematicii, în vechiul Babilon, unde pătratul cu aria sa era folosit, cu mult înaintea lui Pitagora, la găsirea tripletelor pitagoreice. În figura următoare sunt adăugate unui pătrat - unitate inițial mai multe "unghiuri drepte" numite gnomoni sau judecători, evaluatori.

Figura întreagă relevă formula $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$. Fiecare gnomon reprezintă diferența dintre două pătrate consecutive: de exemplu $15 = 8^2 - 7^2$.



În cazul general avem:

$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1.$

Se obțin astfel numerele impare numite mai târziu numere gnomoni (gnomoles). Unele dintre acestea sunt totodată și pătrate perfecte ($9 = 3^2$; $25 = 5^2$; ...). În cazul acestora obținem:

$5^2 - 4^2 = 9 = 3^2$ sau $13^2 - 12^2 = 25 = 5^2$ reprezentând laturile triunghiului egiptean, respectiv triughiului indian. Continuând procedeul se obțin $7^2 = 25^2 - 24^2$; $9^2 = 41^2 - 40^2$; $11^2 = 61^2 - 60^2$; ...

Teoria acestor gnomoni este mult mai întinsă decât ne-am propus să vă prezentăm aici. Este interesant totuși de observat ce cunoștințe matematice vaste i-au stat la dispoziție lui Pitagora împingându-l la descoperirea și demonstrarea faimoasei teoreme.

BIBLIOGRAFIE:

ERNST BINDEL - DIE GEISTIGEN GRUNDLAGEN DER ZAHLEN
ERNST BINDEL - PYTHAGORAS, LEBEN UND LEHRE IN WIRKLICHKEIT UND LEGENDE
IOAN DĂNCILĂ - MATEMATICA GIMNAZIULUI ÎNTRE PROFESOR ȘI ELEV

Problema Cămilelor

Se spune că odată un bătrân arab a lăsat moștenire celor trei băieți ai săi 17 cămile impunând înainte de a-și da ultima suflare următoarele condiții: primul fecior să ia o jumătate din numărul cămilelor, al doilea o treime, iar cel mai mic două cămile.

Neputând să împartă moștenirea, mai ales primii doi, au chemat în ajutor un înțelept. Acesta a venit desigur călare pe o cămilă. Văzând situația fără ieșire, a pus și cămila sa împreună cu celelalte, având în total 18. O jumătate, adică 9 cămile, le-a dat primului fiu, o treime, adică 6 cămile, le-a dat celui de-al doilea, iar două cămile ultimului. Fac în total 9 + 6 + 2 = 17, după care și-a luat cămila sa înapoi.

SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR

Clasa a VIII-a este foarte potrivită pentru lecții recapitulative și de sinteză, lecții prin care se clarifică diferite aspecte, pentru care este necesară o vedere de ansamblu asupra subiectului respectiv.

Odată cu apariția fracțiilor algebrice, simplificarea fracțiilor intră într-o stare de derută relativă. Fracția $\frac{2a}{3a}$ se poate simplifica prin a, $\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$, dar fracția $\frac{2+a}{a+3}$ nu se poate. De ce?

Clarificarea acestei dileme se poate face doar reanalizând simplificarea fracțiilor ordinare. La această analiză se potrivește următorul contraexemplu care, prin derutarea inițială a elevilor, îi va împinge și mai puternic spre lămurirea subiectului.

Să luăm următoarele "simplificări":

$\frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$; $\frac{266}{665}=\frac{2\cancel{66}}{\cancel{66}5}=\frac{2}{5}$

Verificând prin metoda cunoscută, obținem același rezultat:

$\frac{26}{65}=\frac{2\cdot\cancel{13}}{5\cdot\cancel{13}}=\frac{2}{5}$ și $\frac{266}{665}=\frac{2\cdot\cancel{133}}{5\cdot\cancel{133}}=\frac{2}{5}$

Și pe inversele lor funcționează această "simplificare":

$\frac{65}{26}=\frac{5}{2}$ și $\frac{665}{266}=\frac{5}{2}$

Luând însă la întâmplare o fracție, observăm că nu mai merge șmecheria:

$\frac{24}{48}=\frac{\cancel{2}4}{4\cancel{8}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,dar $\frac{24}{48}=\frac{1\cdot\cancel{24}}{2\cdot\cancel{24}}=\frac{1}{2}$

Rămâne să răspundeți voi la următoarele două întrebări:

1) La care din următoarele fracții se poate aplica așa-zisa "simplificare" de mai sus:
$\frac{19}{95};\frac{16}{64};\frac{15}{54};\frac{49}{98};\frac{18}{81};\frac{199}{995};\frac{665}{266};\frac{998}{499};\frac{995}{199}$

2) Stabiliți ce asemănare există între aceste "simplificări" și simplificările $\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$ (corectă) și $\frac{2+a}{a+3}$ (greșită).

Pentru clarificarea totală a subiectului căutați cartea lui FLORICA T. CÂMPAN: VARIATE APLICAȚII ALE MATEMATICII apărută în colecția ALFA la EDITURA ION CREANGĂ în 1984.

TEOREMA LUI THALES

Thales a trăit aproximativ între anii 620-550 î.Chr. în cetatea Milet din Asia Mică. În prima parte a vieții a fost un foarte isteț om de afaceri și, totodată, un abil și înțelept om politic al cetății sale. Marea cotitură a vieții sale a reprezentat-o prima sa călătorie în Egipt, mânat desigur de afacerile sale comerciale.

În această excursie are loc renumita întâmplare în care Thales anunță că poate măsura înălțimea piramidei, fără să se urce pe ea. Uimire. Poți măsura ceva de la distanță? Ș-apoi, acest om nu este preot, de unde ar putea deține secretele zeilor? Însuși regele Egiptului, Amasis asistă la experiență. Ce face Thales? Pentru noi cei din epoca internetului, un lucru banal: înfinge un țăruș în pământ (denumit și acesta gnomon), îl măsoară, îi măsoară umbra, apoi măsoară umbra piramidei. Obținând două triunghiuri asemenea, din proporționalitatea laturilor, Thales găsește înălțimea piramidei. Aceasta este descrierea pe care ne-o lasă Plutarh șase secole mai târziu.

Oricine poate observa că, în situația descrisă, teorema lui Thales, așa cum o găsim în manuale, nu își găsește vreun rost. De ce poartă această teoremă numele lui Thales? Încă din perioada interbelică găsim această denumire în manualele românești. Însă în orice carte din străinătate la teorema lui Thales apare altceva. Se pare că teorema cu segmentele proporționale pe laturile unui triunghi a dat-o Euclid. Ce teoremă a dat însă Thales?

În primul rând el a enunțat anumite proprietăți de care a avut nevoie, dar pe care, considerându-le evidente nu s-a gândit să le demonstreze. Acestea ar fi:

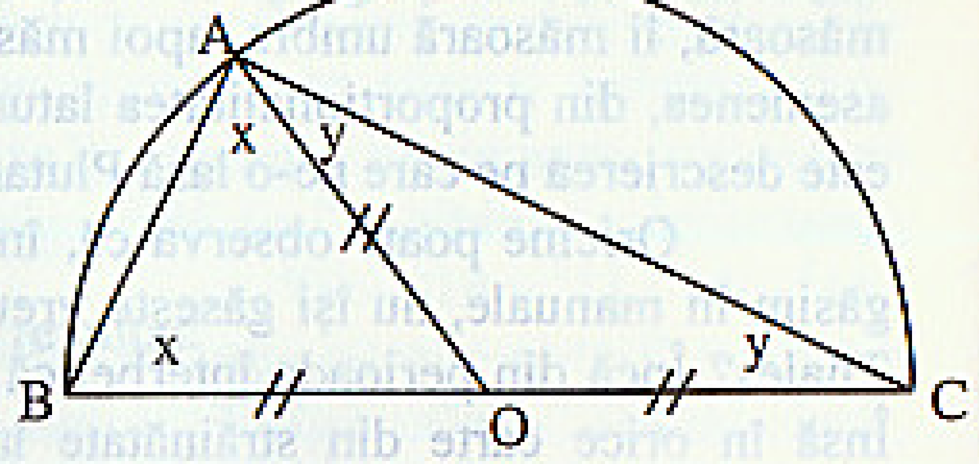
- diametrul împarte cercul în două părți congruente;
- unghiurile opuse la vârf sunt congruente;
- unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente;
- dacă se dau o latură și unghiurile alăturate acesteia într-un triunghi, acesta este complet determinat (U.L.U.)
- două triunghiuri cu unghiuri respectiv congruente au laturile proporționale (propoziție folosită la măsurarea piramidei).

Mai puțin evident i s-a părut lui Thales că în orice triunghi suma unghiurilor este egală cu două unghiuri drepte. Pentru aceasta el a dat o demonstrație, greșită din punct de vedere al axiomaticii euclidiene, dar deosebit de atractivă și potrivită începutului geometriei. Cu atenționările de rigoare aceasta ar trebui prezentată oricărui elev, în primul rând ca un exemplu de ingeniozitate a demonstrației, dar și ca un contraexemplu de încălcare a construcției euclidiene a geometriei.

Cum a gândit deci Thales? Cea mai răspândită figură geometrică este desigur dreptunghiul. Nimeni nu se îndoia atunci că dreptunghiul are patru unghiuri drepte (nici astăzi nu prea se îndoiește cineva de acest fapt, mai ales copiii!). Triunghiul dreptunghic îi va fi apărut lui Thales ca o jumătate dintr-un dreptunghi. Congruența celor două triunghiuri obținute prin trasarea diagonalei îi va fi apărut ca fiind de la sine înțeleasă. De vreme ce suma unghiurilor unui dreptunghi este de patru unghiuri drepte, suma unuia din triunghiurile dreptunghice va fi de două unghiuri drepte, adică 180^0.

Luând un triunghi oarecare, îl putem despărţi cu ajutorul unei înălţimi în două triunghiuri dreptunghice. Din suma unghiurilor acestora (2×180^0) trebuie scăzute cele două unghiuri drepte de la piciorul înălţimii. Rămâne că suma unghiurilor în triunghi este întotdeauna egală cu 180^0.

Observăm că spiritul lui Thales era îndreptat spre descoperirea proprietăţilor, fiind atras mai mult de cele ascunse, neevidente. Pentru demonstrarea unei astfel de proprietăţi el a enunţat şi justificat cele de mai sus. Este vorba de faptul că din punctele unui cerc un diametru este văzut sub unghiuri drepte. Astăzi o demonstrăm imediat cu ajutorul măsurii unghiurilor înscrise în cerc (sfârşitul clasei a VII-a). Cum va fi gândit Thales, care nu cunoştea această teoremă pregătitoare, el fiind situat ca nivel al cunoştinţelor undeva prin clasa a VI-a?



În figura alăturată triunghiurile OAB şi OAC sunt isoscele (OA = OB = OC = r). Înseamnă că unghiurile lor de la bază sunt congruente: < ABO = < BAO = x şi < ACO = < CAO = y. Cunoscând suma unghiurilor în triunghiul ABC, avem: $<A + <B + <C = 180^0$ $\Leftrightarrow (x + y) + x + y = 180^0 \Leftrightarrow 2(x + y) = 180^0 \Leftrightarrow x + y = 90^0$, deci $<A = 90^0$. Vârful A fiind ales oarecare pe semicercul de diametru [BC], putem enunţa teorema dată de Thales : ORICE UNGHI ÎNSCRIS ÎN SEMICERC ESTE DREPT.

Descoperirea unei proprietăţi ascunse produce o anumită bucurie specific umană. Se spune că Thales a fost atât de entuziasmat de această descoperire - considerată ca cea mai frumoasă dintre descoperirile sale - încât, drept mulţumită, a sacrificat pe, altarul zeilor un bou.

Printre teoremele lui Thales am amintit-o şi pe cea care afirmă că unghiurile de la baza triunghiului isoscel sunt congruente. A enunţat-o numai pentru că i-a trebuit în demonstrarea teoremei principale. Pentru ea nu ar fi sacrificat zeilor nici măcar o gâscă.

Este importantă înţelegerea acestor aspecte, în condiţiile în care în manualele actuale, această teoremă - cu triunghiul isoscel - , împreună cu reciproca sa sunt prezentate pe o jumătate de pagină, demonstrate cu lux de amănunte, în schimb ce adevăratei teoreme a lui Thales i-au fost confiscate atât numele cât şi titlul, fiind marginalizată la sfârşitul geometriei, degradată la nivelul de simplă observaţie, de demonstrat ca temă.

Deşi în toate publicaţiile străine teorema cu unghiul înscris în semicerc apare ca "Teorema lui Thales", propunem pentru ea denumirea de CERCUL LUI THALES, pentru a nu produce derută legată de falsa teoremă a lui Thales, cea cu paralela şi proporţionalitatea.

Un aspect important prezintă folosirea Cercului lui Thales la clasă. Această teoremă poate fi introdusă în clasa a VI-a la studiul triunghiului dreptunghic. Din

aceasta pot fi deduse imediat următoarele două consecinţe: 1) Cateta opusă unghiului de 30 este jumătate din ipotenuză; 2) Mediana pe ipotenuză este jumătate din aceasta.

BIBLEOGRAFIE:

MICA ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ, EDITURA TEHNICĂ, 1980
LEXIKON DER MATEMATIK, LEIPZIG, 1979
EUGEN RUSU - DE LA TALES LA EINSTEIN, EDITURA ALBATROS,1971
LOTHAR KUSCH - MATHEMATIK (2): GEOMETRIE, DUSSELDORF,1988
DICŢIONAR DE MATEMATICI GENERALE, EDITURA ENCICLLOPEDICĂ, 1974
N. MIHĂILEANU - ISTORIA MATEMATICII, EDITURA ENCICLOPEDICĂ, 1974
EGMONT COLERUS - DE LA PUNCT LA A PATRA DIMENSIUNE, EDITURA ŞTIINŢIFICĂ, 1967
ARNOLD BERNHARD - GEOMETRIE, EDITURA ARHIETIP, 1995
IOAN DĂNCILĂ - MATEMATICA GIMNAZIULUI, EDITURA CORINT, 1996
BENNO MOHRY - GEOMETRIE, POCKET TEACHER, EDITURA ALL, 1998

TESTE PREGĂTITOARE PENTRU EXAMENELE DE CAPACITATE ŞI ADMITERE ÎN LICEU DIN ANUL 2000
PARTEA I-a
SEMESTRUL I 1999-2000

Culese şi alese de Mariana şi Titus Grigorovici

La recapitularea serioasă a matematicii se porneşte, de obicei, în aceeaşi ordine în care a fost parcursă materia la şcoală. Alegând această cale elevul nu poate parcurge de la început teste diversificate. În plus, apar şi alte impedimente.De exemplu, problemele cu arii şi calcule cu teorema lui Pitagora sunt mai uşoare decât demonstraţiile aflate în materie înaintea lor.

În afara variantei clasice, materia de recapitulat poate fi abordată şi în altă ordine, formând de la început câteva "capete de pod" în diferite părţi ale matematicii, beneficiind de la început de teste variate şi atractive. În acest mod sunt aranjate primele teste din acest caiet, cărora le-am anexat respectivele "capete de pod".

Din punct de vedere al gradului de dificultate, următoarele teste pornesc de la nivelul examenului de capacitate urcând încet către nivelul de liceu, desigur în concordanţă cu noua programă valabilă din acest an şcolar.