RĂSPUNSURI

I. 1) 426,4; **2)** 4,56 mm; **3)** 7744 cm^2; **4)** 24°; **5)** 300; **6)** 24.000; 26.000; 30.000 lei; **7)** π cm^2; **8)** $-24\sqrt{5}$ **9)** 15 cm; **10) a)** M=27; T=32; **b)** m=864; d=1; **11) i)** F; **ii)** A.

II. 1) 10; **2)** 12ml; **3)** 234,6; **4)** $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$; **5)** a 8-a zi; **6)** 3 ori; **7)** 11°; **8)** $(10-\pi)/4 \approx 1,715\ m^2$; **9)** a=19; **10)** a=5; b= -5; **i)** 0; **ii)** -50; **11) a)** 1/2; **b)** 1/3; **c)** 1/5; **d)** 7/10; **e)** 1; **f)** 0; **12) b)** AB=52; BC=25; CD=39; DA=60; AC=63; BD=56 cm; **c)** P =176 cm; A=1764 cm^2.

III. 1) 7/25; **2)** 3960 kg; **3)** {4}; **4)** 17; **5)** 21°36'; 50°24'; 108°; **6)** 7128 lei; **7)** 1,98 cm^2; **8)** 0; **9)** 12; **10) a)** $F_1=4/5$; $F_2=3/4$; **b)** 2; **c)** 37,5 %; **11)** 90; 91.

IV. 1) 1999; **2)** 33,(3)%; **3)** 3,16; **4)** $144\sqrt{2}$cm; **5)** 74; **6)** 7; **7)** $(a-b)^2$; **9)** 12 cm; **10) a)** $m_b = 9,6$; **b)** 64 %; **11) i) a)** impar; **ii)** nu există; **b)** 14 și 15; **12) a)** A=C=90°; B=75°; D=105°; **b)** AB=AD=8; $BC = 4\sqrt{6}$; $CD = 4\sqrt{2}$cm; **c)** $P = 4\left(4+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ cm $A = 16(2+\sqrt{3})$ cm^2.

V. 1) 2h 17min 36sec; **3)** 7/17; **4)** a; **5)** 1; **7)** -74; **8)** 55°; **9)** la prima; **10) i)** $a=23/8 \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$; **ii)** $a= -1 \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$; **iii)** $a = 21\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)/4 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ **11)** -56; **12) a)** BE=15; EC=30; DF=60; FC=40 cm; **b)** $A_{ABD}=1350$; $A_{CEF}=600$; $A_{BEFD}=750$ cm^2; **c)** $h_{BEFD}=12$; $h_{ABD}=36$; $h_{CEF}=24$ cm.

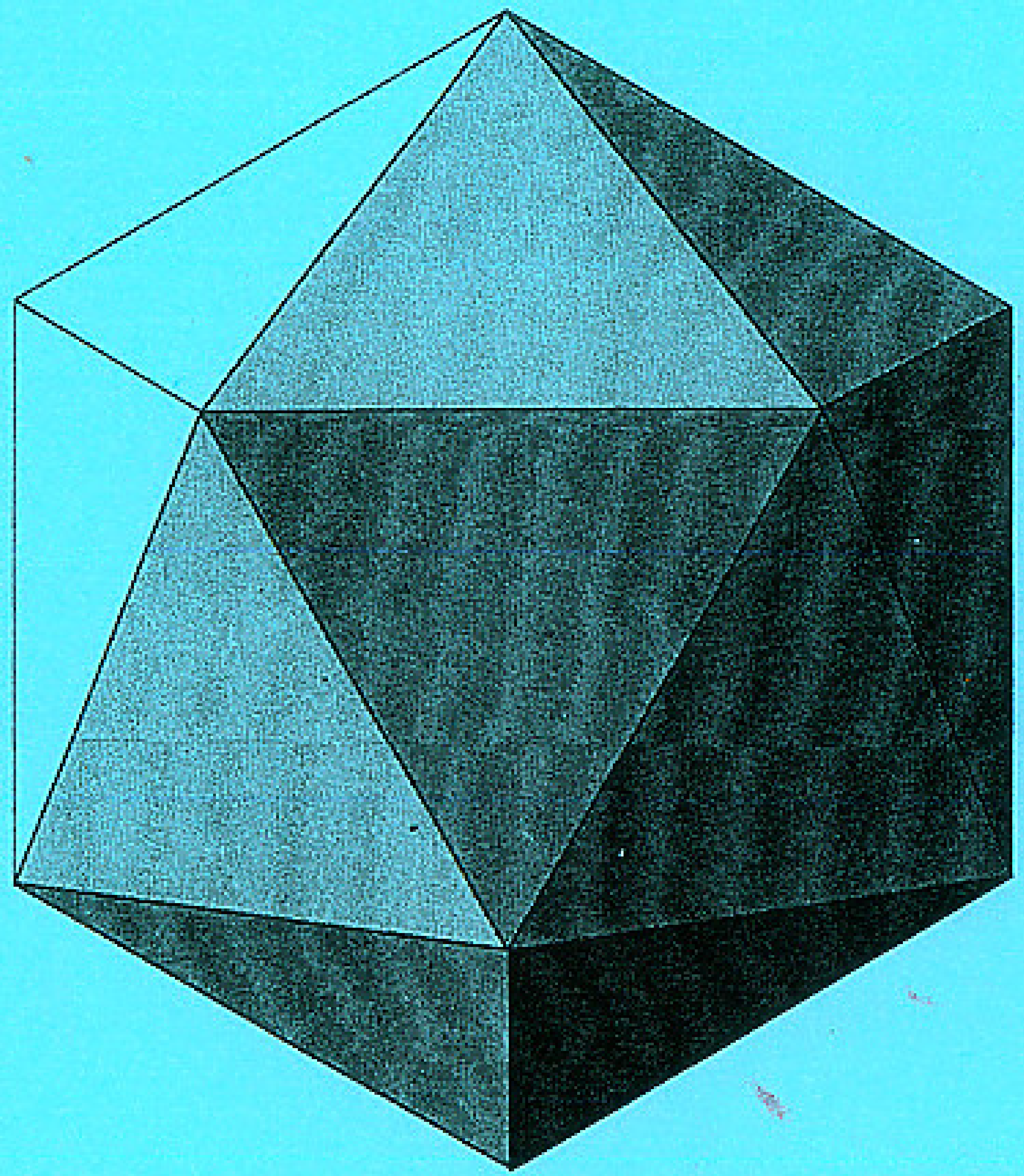
VI. 1) 1; **2)** 28; **3)** 175,2 cm; **4)** 500 m; **6)** 325.000 și 65.000 lei; **7)** 6x+4; **8)** 4; **9)** 14 sau 16 cm; **10) i)** a=10; b=10; **11)** $n \in \{28;42;84\}$; **12) a)** 10 cm; **b)** h=MN; **c)** 100 cm^2.

VII. 1) 2748 m; **2)** x=4; **3)** 1296; **4)** 54°32'9''; **5)** 54°; 54°; 72°; **6)** 281.600 km^2; **7)** 20%; **8)** 230769; **9)** (a -b)/2; **10)** 9/4; **11)** 719; 1439; 2159; 2879; **12) i)** 45°; **ii)** 4 cm; 2 cm.

ISBN 973-9196-38-1
Editura TRIADE 1999

NUMĂRUL 4 - MAI 1999

P3NT4GON1A



CAIET TRIMESTRIAL
DE MATEMATICĂ

CINE VOTEAZĂ CU REFORMA ?

De când a început reforma, Ministrul Educației Naționale, Domnul Andrei Marga se străduieşte să introducă, printre multe altele şi autonomia la toate nivelele. Un aspect aparte al acestei autonomii este faptul că ordinea predării lecțiilor nu mai este obligatorie. Cum pot fi însă rearanjate lecțiile fără a încălca ordinea logică a fenomenelor studiate şi ce motiv ar avea cineva să facă schimbări?În caietul de față vă prezentăm un astfel de exemplu pentru predarea fracțiilor zecimale cât şi motive în favoarea sa.

Totodată vă prezentăm şi un exemplu de transformare a celei mai serioase matematici într-o joacă. Şi dacă tot veni vorba de joacă, pentru cei cu înclinații practice, oferim instrucțiuni de realizare a unui interesant abajur având la bază icosaedrul regulat.

Revenind la reforma învățământului, una din noile cerințe, de care trebuie să țină seama dascălii, de exemplu în cadrul orelor opționale, este interdisciplinaritatea. Frumoasă idee, unul dintre exemplele cel mai des întâlnite în acest sens fiind poetul-matematician Ion Barbu. Dar câți profesori se încumetă în acest domeniu? Pentru cei dornici de aşa ceva, în paginile acestui caiet, matematica se împleteşte armonios cu istoria, filosofia, desenul şi lucrul manual.

O temă aparte a matematicii este reprezentată de inegalități, ele fiind eliminate total din viitoarea programă de gimnaziu, dar rămânând desigur în zona de interes pentru viitoarele tematici ale orelor opționale. În caietul de față vă prezentăm o tratare a acestei lecții care încearcă să îmbine accesibilitatea cu statutul de vedetă a olimpiadelor.

Nici pregătirea examenului de capacitate nu a fost uitată. Astfel, oferim absolvenților claselor a VII-a un set de teste recapitulative în vederea adaptării la cerințele clasei a VIII-a.

SUCCES!

CUPRINS

Acest caiet a apărut cu sprijinul imprimeriei PRINTEK, Cluj

Comenzi, sugestii şi propuneri sau teme de abordat sunt aşteptate la adresa redacției: Titus Grigorovici, str. Fabricii nr. 9, ap. 27, 3400 Cluj-Napoca, sau la Editura Triade CP 1-400, 3400 Cluj-Napoca.

NUMERELE DE-A LUNGUL ISTORIEI (2)

Cum au apărut numerele şi denumirile lor? Cum priveau oamenii în timpurile străvechi aceste bijuterii ale inteligenței omeneşti? Iată câteva întrebări la care elevii zilelor noastre aşteaptă răspunsuri de negăsit în manuale.

Încercând să găsim originea cuvântului cifră ajungem la ebraicul SEPHIRA însemnând lumină, strălucire. Doar cu înțeles secundar apar numerele. Demne de observat sunt şi înrudirile cu ebraicul SEPHER însemnând carte şi cu grecescul SPHAIRA pentru sferă. Prin acest cuvânt se sublinia izvorul de lumină reprezentat de numere. Mergând mai departe prin diferite culturi, găsim SIFR în arabă, ZEPHIRUM în latină şi CIFRĂ în română. Se poate observa şi înrudirea cu cuvântul CIFRU(CIFRAT) pentru o scriere secretă subliniind privilegiul de care beneficiau la origini cei care stăpâneau scrierea numerelor.

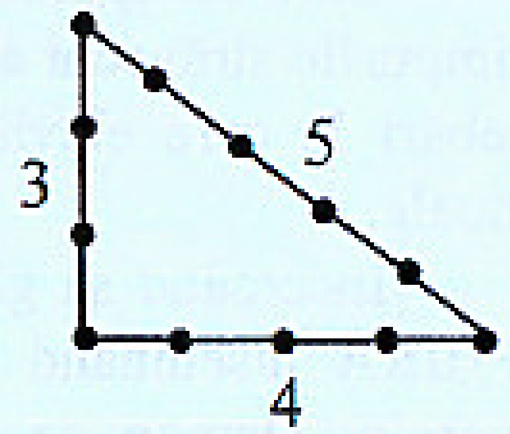
Astăzi, când copiii învață să socotească în grădiniță, iar din clasa I rezolvă ecuații, ne este foarte greu să înțelegem acele vremuri străvechi. Tratarea din zilele noastre a numerelor ar fi fost privită în antichitate ca o adevărată barbarie.

Iată un exemplu ce poate clarifica cele afirmate mai sus : din cele mai străvechi timpuri oamenii au împărțit numerele în numere cu soț şi numere fără soț. Cele cu soț erau considerate numere femeieşti iar cele fără soț numere bărbăteşti. Plutarh (46-120 d.Chr.) ne explică: “La împărțirea numerelor în două părți egale, numerele cu soț se evidențiază, despărțindu-se în două părți întregi, lăsând în sine, între ele, un spațiu liber de primire. Împărțind un număr fără soț în două părți întregi egale, rămâne întotdeauna în mijlocul său un rest capabil de reproducere. Numărul impar are față de cel par, în plus, puterea reproductivă, pe care o păstrează şi la împerecherea (adunarea) cu unul par “.

Ce vor să spună aceste fraze, este clar : numărul 6, de exemplu, se desparte ca sumă 6=3+3 fiind un număr femeiesc, pe când numărul impar 7=3+1+3 este număr bărbătesc. În ultimul caz rămâne în mijloc unitatea inițială ca un fel de falus reproductiv, pe când, în primul caz, acest loc rămâne liber, gata de primire.

Astăzi suntem înclinați să zâmbim la astfel de gânduri, dar grecii antici le tratau foarte serios.

O idee asemănătoare găsim în Egiptul antic, în legătură cu triunghiul sfânt (triunghiul dreptunghic cu laturile de 3,4 şi 5). Bărbăţia - cateta verticală de 3 era reprezentată de Osiris, feminitatea - cateta orizontală de 4 era reprezentată de Isis, iar ipotenuza născută din cei doi, de fiul lor Horus. Din această cauză, spre deosebire de simpla adunare de mai sus, operaţia $3^2 + 4^2 = 5^2$ din acest triunghi era considerată ca o operaţie sfântă.



BIBLIOGRAFIE
ERNST BINDEL - DIE GEISTIGEN GRUNDLAGEN DER ZAHLEN, 1958

DE CE ?

De ce se foloseşte scrierea 2/12 în loc de 12 : 2? Aceeaşi întrebare se poate pune şi la divizibilitatea polinoamelor.

De fapt divizibilitatea înseamnă împărţirea exactă. Iar împărţirea, de când lumea şi pământul s-a făcut de felul 12 : 2= 6 şi nu 2 /12 =6. Scrierea cu " / ", care inversează ordinea naturală a deîmpărţitului şi a împărţitorului, îi derutează total pe elevi, pe când scrierea cu ":" poate fi uşor înţeleasă ca o împărţire exactă(un punct în plus).

Aşadar de ce nu se foloseşte scrierea 12 : 2? DE AIA!

ECHERUL GEOMETRIC

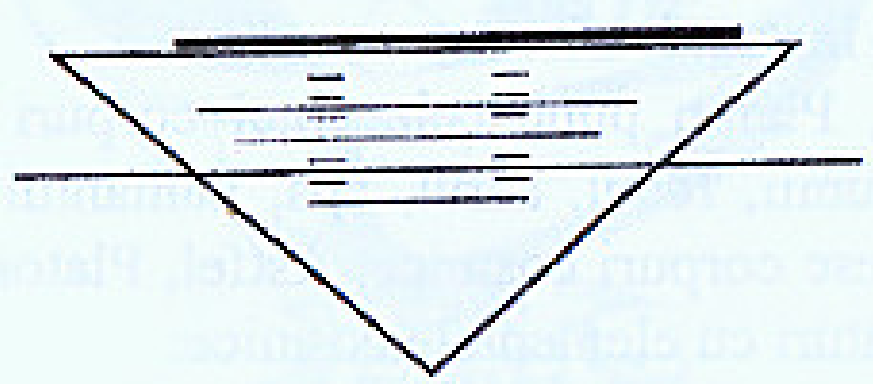
Instrumentele geometrice cunoscute de oricine şi folosite la noi în ţară (rigla, echerul isoscel, echerul cu unghiuri de 30° şi 60°, raportorul şi compasul) sunt cunoscute din antichitate.

În Europa de Vest se foloseşte, însă, de câteva zeci de ani un instrument perfecţionat care înlocuieşte toate instrumentele în afară de compas. Denumirea sa este ECHER GEOMETRIC. În cele ce urmează vă prezentăm acest instrument deosebit, cât şi modul în care se foloseşte la diferitele construcţii geometrice.

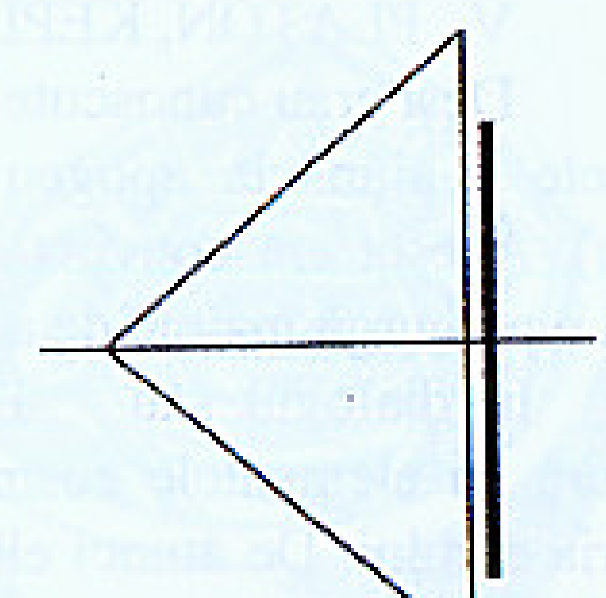
În afară de raportorul imprimat, acest echer mai are câteva elemente de bază: paralele la ipotenuză ce uşurează enorm construcţia dreptelor paralele; dreapta ce uneşte mijlocul ipotenuzei cu punctul de la 90^0 care uşurează desenarea dreptelor perpendiculare; gradaţia pe ipotenuză pornind din mijloc în ambele sensuri, aceasta ajutând la găsirea

mijlocului unui segment, la construcţia figurilor simetrice, dar mai ales la desenarea bisectoarei unui unghi fără a folosi compasul.

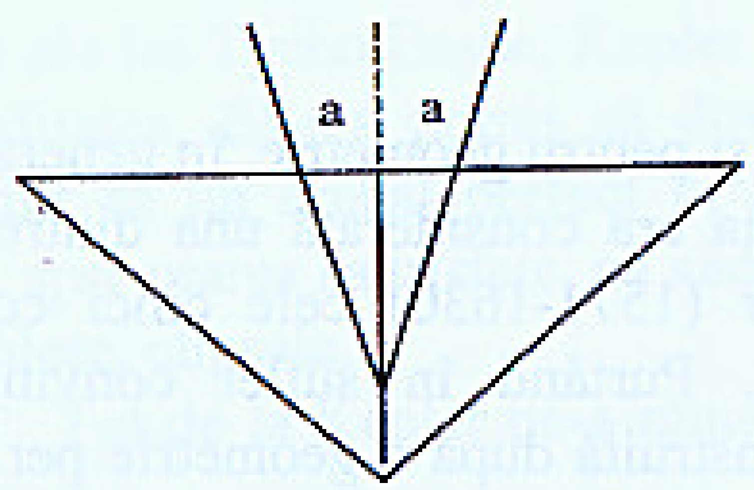
În următoarele figuri sunt prezentate construcţiile enumerate mai sus. (De cumpărat în papetării sau la depozitele RTC.)



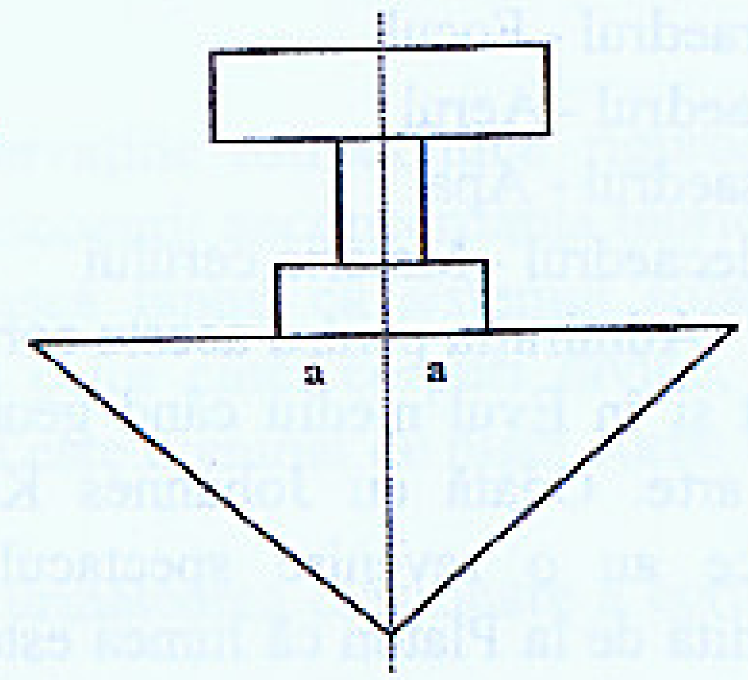
Drepte paralele



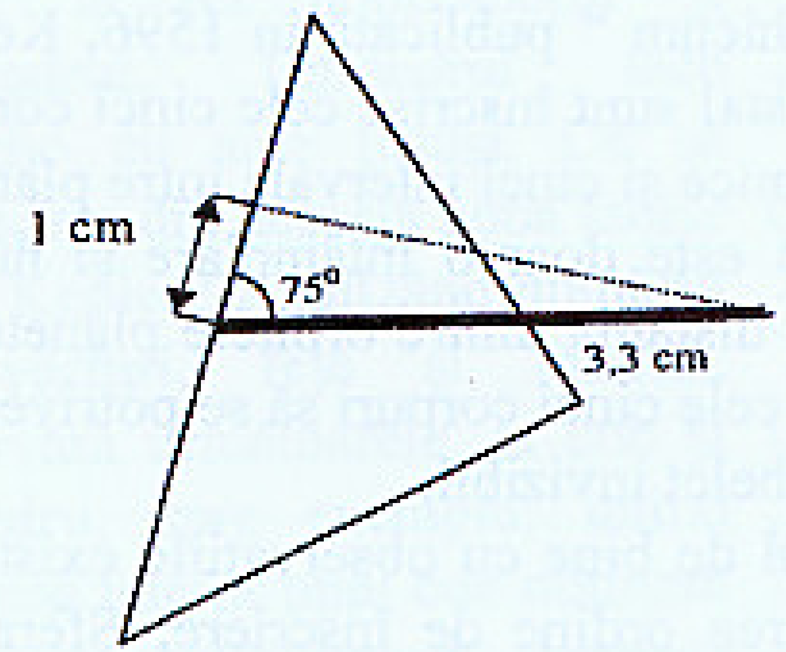
Drepte perpendiculare



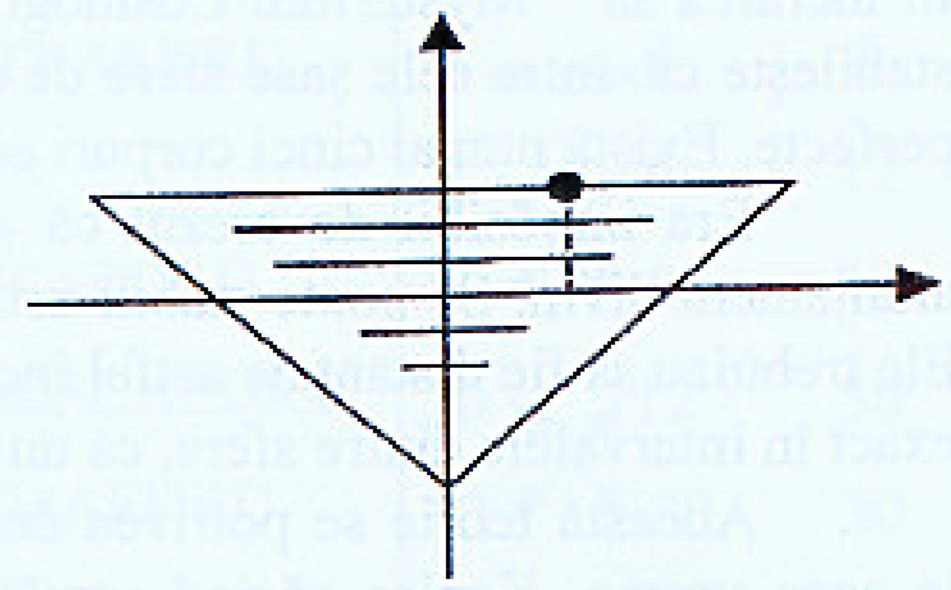
Bisectoarea unui unghi



Figuri simetrice



Constructia triunghiurilor (L.U.L)



Reprezentarea punctelor în plan

CORPURI PLATONICE (3)

Mariana Grigorovici
Titus Grigorovici

V. PLATON, KEPLER ŞI CORPURILE PERFECTE

Deşi erau cunoscute de către pitagoreici, istoria celor cinci corpuri perfecte a ajuns la apogeu odată cu filosoful antic Platon (c.428-348 î.Chr.). Acesta era convins de importanţa geometriei, cerându-le elevilor săi să o parcurgă înainte de a fi primiţi în Academie.

În dialogul său “ Timaios “, Platon pune cele cinci corpuri în legătură cu elementele cosmice ale lumii, focul, aerul, apa, pământul şi materia cerului. De atunci ele se numesc corpuri cosmice. Astfel, Platon a stabilit pentru acestea următoarele legături cu elementele cosmice:

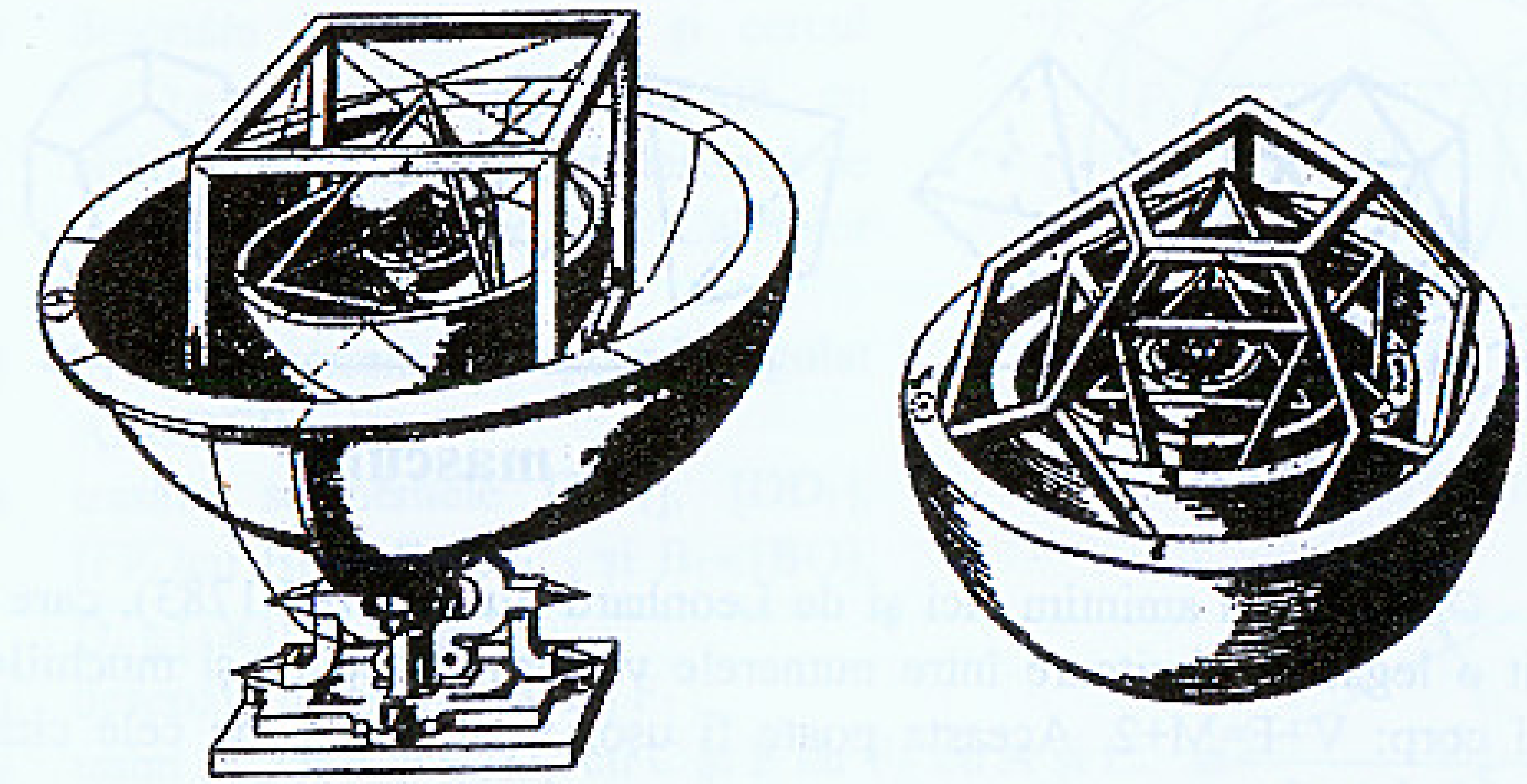
Cubul - Pământul
Tetraedrul - Focul
Octaedrul - Aerul
Icosaedrul - Apa
Dodecaedrul - Materia cerului

Admiraţia pentru aceste corpuri şi pentru geometrie, în general, s-a păstrat şi în Evul mediu când geometria era considerată una dintre cele şapte arte. Odată cu Johannes Kepler (1571-1630) cele cinci corpuri cosmice au o revenire spectaculoasă. Purtând în suflet convingerea moştenită de la Platon că lumea este construită după o geometrie perfectă, Kepler se loveşte de o consecinţă frapantă: există doar cinci corpuri perfecte şi exact şase planete (atâtea erau cunoscute la acel moment). Încă din antichitate se considera că planetele se mişcă pe nişte sfere de cristal. În lucrarea sa “ Mysterium Cosmographicum “ publicată în 1596, Kepler stabileşte că, între cele şase sfere de cristal sunt înscrise cele cinci corpuri perfecte. Există numai cinci corpuri cosmice şi cinci intervale între planete.

Era imposibil de crezut că aici este doar o întâmplare şi nu un aranjament divin. Se poate stabili astfel distanţa dintre orbitele planetelor. Ele trebuiau să fie distanţate astfel încât cele cinci corpuri să se potrivească exact în intervalele dintre sfere, ca un schelet invizibil.

Această teorie se potrivea destul de bine cu observaţiile existente la acea vreme, Kepler găsind următoarea ordine de înscriere: Sfera lui Mercur în octaedru în Sfera Venus în icosaedru în Sfera Pământ în dodecaedru în Sfera Marte în tetraedru în Sfera Jupiter în cub în Sfera

Saturn. Cu aceasta, Kepler sublinia încă o dată cosmicitatea celor cinci corpuri. Şi într-adevăr, în mare teoria părea corectă.



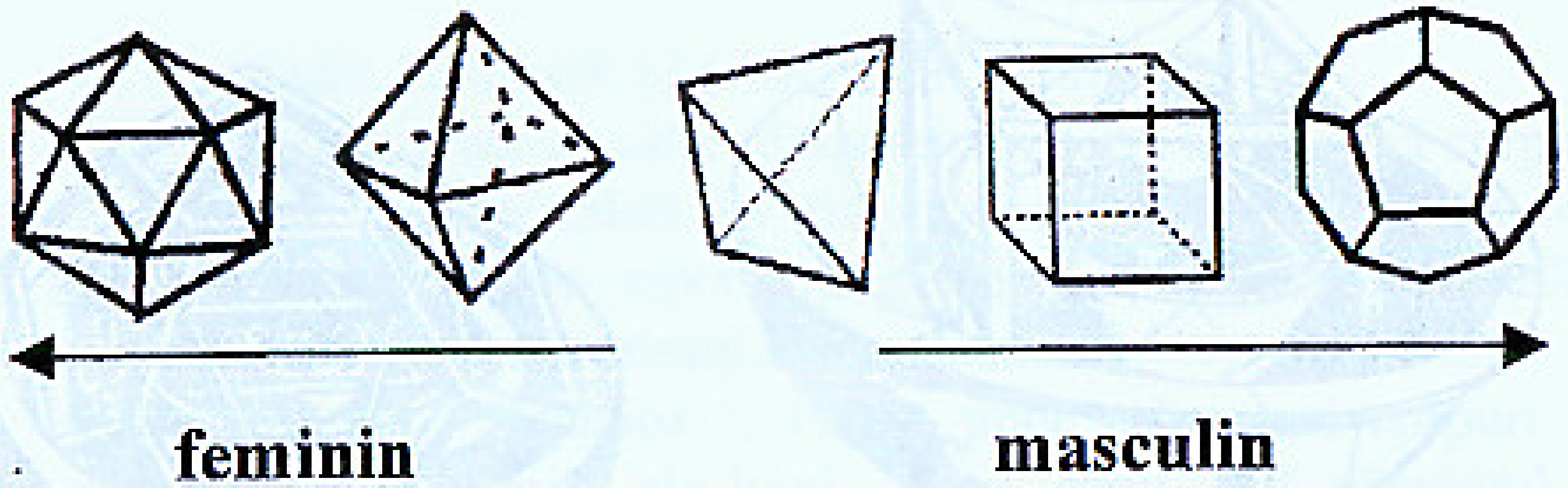
Mai târziu, dispunând de observaţiile astronomice riguroase şi exacte ale lui Tycho Brahe, Kepler a descoperit neconcordanţa teoriei sale cu realitatea. El s-a pornit să dovedească faptul că sistemul solar este construit ca un cristal perfect în jurul celor cinci corpuri divine, dar a arătat, spre marea sa tristeţe, că sistemul este dominat de nişte curbe lipsite de nobleţe, clipsele.

Tot de la Kepler ne-a rămas şi următoarea clasificare a corpurilor perfecte.

Cubul şi octaedrul formează o pereche, ca soţ şi soţie; la fel dodecaedrul şi icosaedrul. Tetraedrul face pereche cu sine însuşi. Ce să înţelegem din această nouă teorie a lui Kepler? Analizând numărul de vârfuri, feţe şi muchii, observăm următoarele, la cub şi octaedru, spre exemplu: unind centrele feţelor unui cub obţinem un octaedru; unind centrele feţelor unui octaedru, obţinem un cub.

	V	F	M
TETRAEDRU	4	4	6
CUB	8	6	12
OCTAEDRU	6	8	12
DODECAEDRU	20	12	30
ICOSAEDRU	12	20	30

Acest principiu al duplicității sau polarității se regăsește și la perechea dodecaedru-icosaedru. Unind centrele fețelor unui tetraedru obținem tot un tetraedru.



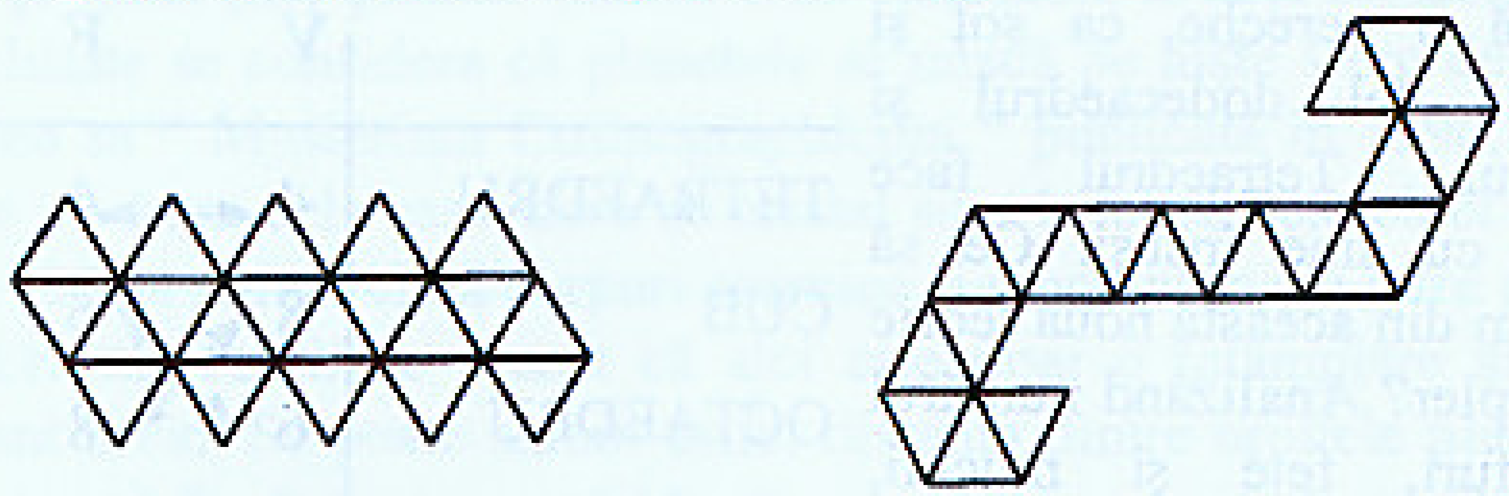
Merită să amintim aici și de Leonhard Euler (1707-1783), care a găsit o legătură uimitoare între numerele vârfurilor, fețelor și muchiilor unui corp: V+F=M+2. Aceasta poate fi ușor verificată și pe cele cinci corpuri platonice.

VI. ICOSAEDRUL

Așa cum spune și denumirea sa (în limba greacă, ikosi =20), acest corp are douăzeci de fețe triunghiuri echilaterale (vezi coperta 1).

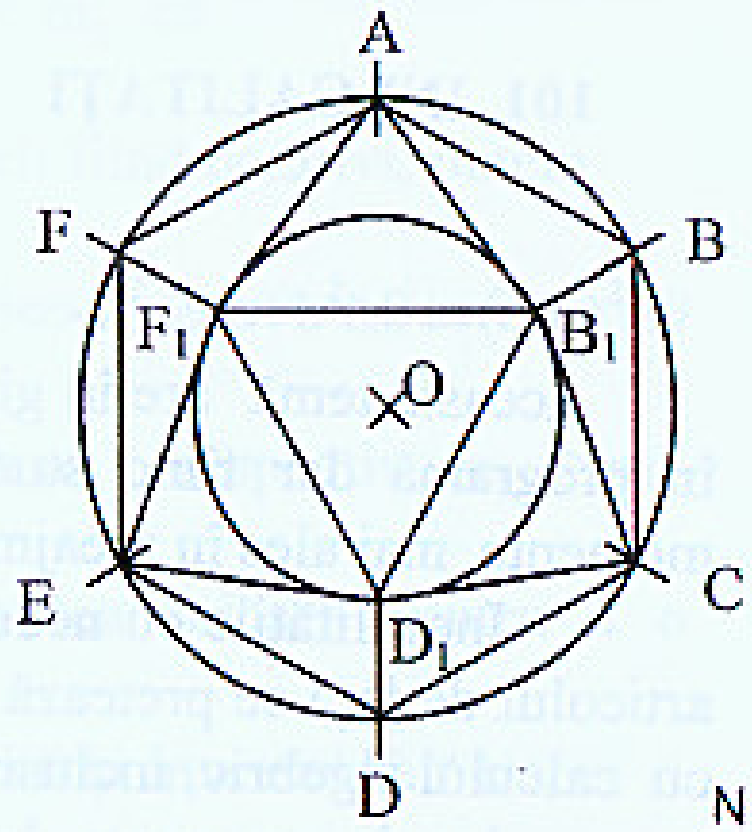
Aria sa este deci: $A = 20\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$

Construirea icosaedrului din carton reprezintă un deosebit exercițiu de imaginație și îndemânare. Iată două variante de desfășurare după care poate fi tăiat cartonul (trebuie adăugate "urechile" de lipire):



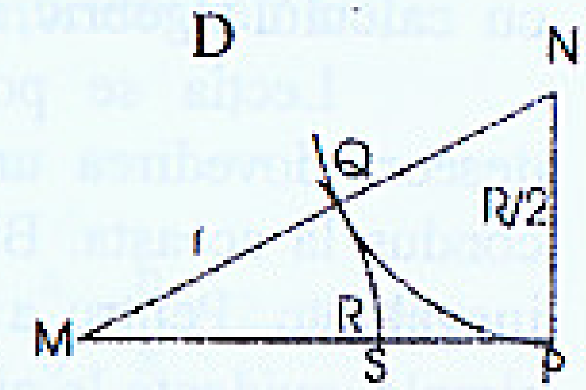
Icosaedrul poate fi construit și din bețișoare (de exemplu bețișoare igienice de pe care s-a îndepărtat vata de la capete, prin care se trece ață cu ajutorul unei sârme; sunt necesare 42 bețișoare). Astfel, legând trei bețișoare cap la cap, obținem un triunghi echilateral. Continuând construcția, cu încă trei bețișoare obținem un tetraedru regulat. Adăugând în continuare bețe se obține în final un icosaedru regulat.

a) DESENAREA ICOSAEDRULUI



Iată în continuare pașii de parcurs pentru desenarea acestui frumos corp:

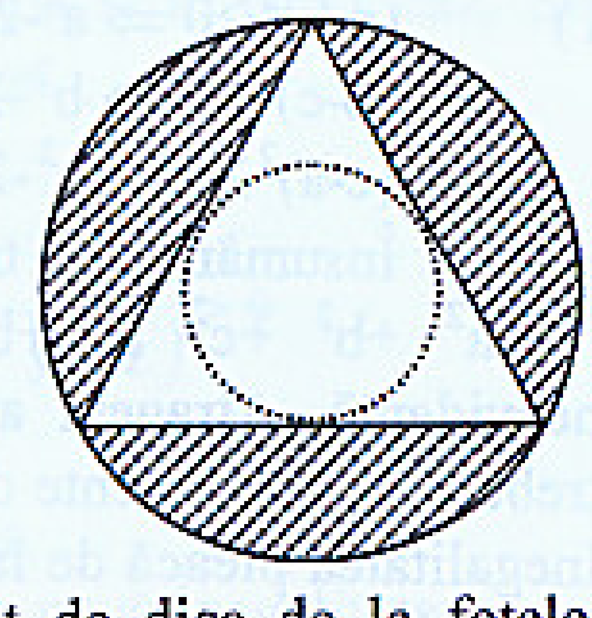
1) desenăm cercul $\mathcal{C}_1(O,R)$ și cercul $\mathcal{C}_2(O,r)$, raza r fiind găsită cu ajutorul secțiunii de aur descrisă pe larg în numărul trecut al Caietelor PENTAGONIA;
2) în $\mathcal{C}_1$ înscriem hexagonul regulat ABCDEF;
3) trasăm segmentele $[BB_1]$, $[DD_1]$, $[FF_1]$cu $B_1, D_1, F_1 \in \mathcal{C}_2$ și $B_1 \in [BO]$, $D_1 \in [DO]$, $F_1 \in [FO]$;
4) desenăm triunghiul $B_1 D_1 F_1$;
5) unim B_1 cu A și C, D_1 cu C și E iar F_1 cu A și E.



b) ABAJUR - ICOSAEDRU

Cei îndemânatici vor putea confecționa și un abajur deosebit bazat pe ideea de icosaedru. Pentru realizarea sa procedați astfel:

Decupați dintr-un carton subțire și deschis la culoare douăzeci de discuri cu diametrul de 20 cm. În fiecare înscrieți un triunghi echilateral. Aceste triunghiuri vor fi fețele viitorului icosaedru. Îndoiți apoi cartoanele pe laturile triunghiurilor. La două dintre fețe decupați discul înscris în triunghi, realizând găurile de aerisire ale abajurului(cercul punctat).



Pentru asamblare suprapuneți câte un segment de disc de la fețele alăturate (părțile întunecate din figură), fie lipindu-le,fie capsându-le de-a lungul laturilor triunghiurilor. Aceste "urechi" de carton vor ieși în afara abajurului creând în final o senzație de sferă. Trebuie avut grijă ca cele două triunghiuri cu găuri de aerisire să fie asamblate diametral opus.

În final montați în interiorul său, central, cu ajutorul unui schelet de sârmă, un bec destul de slab (25-40W) pentru a evita aprinderea abajurului.

BIBLIOGRAFIE:

1) ERNST BINDEL: HARMONIEN IN REICHE DER GEOMETRIE, STUTTGART 1964
2) ARTHUR KOESTLER: LUNATICII, HUMANITAS 1995
3) EUGENIUSZ RYBKA: PATRU SECOLE DE DEZVOLTARE A GÂNDIRII COPERNICANE, EDITURA ȘTIINȚIFICĂ 1974

101 INEGALITAȚI

Maria Breckner
Mariana Grigorovici

Această temă are în gimnaziu un statut aparte, ea neapărând explicit în programă dar fiind studiată de-a lungul celor patru ani în diferite momente, mai ales în preajma olimpiadelor.

Inegalitățile cu nedeterminate (cu litere) de care ne vom ocupa în articolul de față se pretează a fi studiate după ce elevii au făcut cunoștință cu calculul algebric, inclusiv cu formulele de calcul prescurtat.

Lecția se poate începe cu construcții de inegalități deoarece deseori dovedirea unei inegalități presupune ghicirea drumului care a condus la aceasta. Bineînțeles că pot exista mai multe căi către aceeași inegalitate. Pentru a descoperi o inegalitate trebuie plecat de la relații simple, evidente la nivelul claselor de gimnaziu, de exemplu $(a-b)^2\geq 0$ sau inegalitatea mediilor– care și ea are ca start prima relație. Să luăm primul exemplu:

1) $(a-b)^2\geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0$
$(b-c)^2\geq 0 \Rightarrow b^2-2bc+c^2\geq 0$
$(c-a)^2\geq 0 \Rightarrow c^2-2ac+a^2\geq 0$
Însumând cele trei inegalități și împărțind totul la 2 $\Rightarrow$
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, o inegalitate remarcabilă dar cu totul neevidentă. Atragem atenția asupra faptului că inegalitățile cerute nu trebuie să fie evidente deoarece copiii n-ar înțelege ce se dorește de la ei. Inegalitatea pleacă de la ceva evident și prin operațiuni mai mult sau mai puțin simple se ajunge la o situație neevidentă.

Desigur, inegalitățile se pot dovedi și pornind pe calea inversă, adică de la ceea ce se cere a fi demonstrat spre o relație evidentă. Să exemplificăm pe următorul set de inegalități.

2) INEGALITATEA MEDIILOR

Pentru două numere pozitive $a\leq b$ se poate dovedi următorul șir de inegalități: $a\leq m_h\leq m_g\leq m_a\leq m_p\leq b$, egalitatea fiind îndeplinită penrtu a=b, unde am notat : $m_h=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$ (media armonică), $m_g=\sqrt{ab}$ (media geometrică – proporțională), $m_a=\dfrac{a+b}{2}$ (media aritmetică) și $m_p=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (media pătratică).

Să dovedim pentru exemplificare relația $m_a\geq m_g \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Ambii membrii fiind pozitivi, putem ridica la pătrat: $\Leftrightarrow (a+b)^2\geq 4ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\geq 4ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$ ceea ce este evident.

Asemănător se demonstrează și $m_g\geq m_h$ respectiv $m_p\geq m_a$. Acestea vi le lăsăm ca temă.

Din acest șir de inegalități se poate lua oricare pentru a o transforma într-o nouă inegalitate.

3) Folosind $m_a\geq m_g$, pentru orice număr $a>0$ și inversul său $1/a$, obținem: $\dfrac{a+{}^1\!/\!_a}{2}\geq\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow a+\dfrac{1}{a}\geq 2$

3') Asemănător , pentru $\dfrac{a}{b}$ și $\dfrac{b}{a}$, se poate obține $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$, pentru orice numere a și b pozitive și nenule.

Deși nu se poate calcula în gimnaziu media geometrică a mai multor numere, inegalitatea mediilor rămâne valabilă și în acest caz. Să luăm o aplicație a relației $m_a\geq m_h$ pentru trei numere.

4) Fie numerele $x, y, z>0$. Din $m_a\geq m_h \Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}\Leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9,$$

o inegalitate surprinzătoare dar simplu de demonstrat.

4') Dacă adăugăm condiția $x+y+z=1$, obținem o nouă inegalitate:

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq 9$. Astfel de inegalități se numesc INEGALITĂȚI CONDIȚIONATE pentru că sunt legate de anumite relații obligatorii (aici $x+y+z=1$).

5) O altă inegalitate condiționată este următoarea:
Daca $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$, să se arate că $-\dfrac{1}{2}\leq ab+bc+ca\leq 1$

A doua inegalitate este imediată deoarece $1=a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (vezi exemplul 1)

Pentru prima se procedează asemănător:

$$1=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow -\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \le ab+bc+ca \Big| \cdot 2$$

şi trecem în al doilea membru toţi termenii, obţinând $0 \le (a+b+c)^2$ (A)

6) Încercaţi să demonstraţi în mod asemănător următoarea inegalitate:

Dacă a, b, c $\in \mathbf{R}$ şi $a^2+b^2+c^2=3$, atunci $-\frac{3}{2} \le ab+bc+ca \le 3$.

7) Câteodată folosim condiţia dată şi o înlocuim în inegalitate pentru a face verificarea. Să exemplificăm pe următoarea situaţie:

Dacă $a+b+c=0$, atunci $(-a+b+c)^2 - 4(a-b+c)(a+b-c) \ge 0$

Din condiţia $a+b+c=0$ obţinem egalităţile $b+c=-a$; $a+c=-b$; $a+b=-c$.

Înlocuind în relaţia cerută obţinem: $(-2a)^2 - 4(-2b)(-2c) \ge 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 16bc \ge 0 \,\big|\, :4$ şi folosind $a=-b-c$ $\Rightarrow (-b-c)^2 - 4bc \ge 0$.

Egalitatea are loc pentru $b=c=-a/2$.

8) Alte inegalităţi sunt ceva mai complicate şi necesită folosirea altor inegalităţi cunoscute. Spre exemplu:

Daca $a+b+c=6p$ atunci $a^2+b^2+c^2 \ge 12p^2$

Ridicând la pătrat ambii membri ai egalităţii $a+b+c=6p$ obţinem $a^2+b^2+c^2=36p^2-2(ab+bc+ca)$.

Dar $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow -(ab+bc+ca) \ge -(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 36p^2 - 2(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge 36p^2 \,\big|\, :3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 12p^2$

INEGALITĂŢI GEOMETRICE

Dacă nedeterminatele sunt laturile unei figuri geometrice, apare o categorie aparte de inegalităţi condiţionate de existenţa figurilor respective şi de relaţiile care există între ele. Astfel cunoaştem că trei numere pot reprezeta lungimile laturilor unui triunghi dacă oricare dintre ele este mai mic decât suma celorlalte două. Să exemplificăm:

9) Să se arate că în orice triunghi de laturi a, b, c are loc inegalitatea $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

Din cele exemplificate mai sus avem:

$a<b+c \,\big|\, \cdot a \Rightarrow a^2 < ab+ac$ (1)

$b<c+a \,\big|\, \cdot b \Rightarrow b^2 < bc+ab$ (2)

$c<a+b \,\big|\, \cdot c \Rightarrow c^2 < ac+bc$ (3)

Însumând (1), (2), (3) membru cu membru obţinem inegalitatea cerută.

10) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi, să se demonstreze că $|b^2+c^2-a^2| < 2bc$.

Din $a+b+c>0$ şi $a<b+c \Leftrightarrow b+c-a>0 \Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>-2bc$ (1)

Din $b<c+a \Leftrightarrow b-c-a<0$ şi $c<a+b \Leftrightarrow b-c+a>0 \Rightarrow (b-c-a)(b-c+a)<0$

$\Leftrightarrow (b-c)^2-a^2<0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2<2bc$ (2)

Relaţiile (1) şi (2) ne conduc la inegalitatea cerută.

11) Să se arate că în orice paralelipiped dreptunghic are loc inegalitatea $d \ge \frac{p\sqrt{3}}{6}$ unde d este lungimea diagonalei iar p este semiperimetrul paralelipipedului (semisuma muchiilor sale). În ce caz avem egalitatea?

Dacă a, b, c sunt dimensiunile paralelipipedului atunci $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ iar $p=2(a+b+c)$.

Din inegalitatea mediilor: $m_a \le m_p$ $\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Dar $a+b+c=\frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{6} \le \frac{d}{\sqrt{3}} \Rightarrow d \ge \frac{p\sqrt{3}}{6}$.

*

Există, desigur şi alte categorii de inegalităţi, studiul complet al acestei teme, chiar şi la nivel de gimnaziu, putând umple o întregă carte. Noi ne oprim aici şi vă propunem spre desfătare demonstrarea următoarelor inegalităţi.

1) Să se demonstreze că pentru orice numere reale a şi b au loc:

a) $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

b) $(a-b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

c) $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

d) $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

e) $(a+b)^2 \ge 4ab$

f) $\frac{2a}{1+a^2} - 1 \le 0$

g) $a^2 + \frac{1}{a^2} \ge 2$; $a \ne 0$

h) $3(1+a^2+a^4) \ge (1+a+a^2)^2$

i) $\frac{a^4}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^4}{(a^2+b^2)^2} + \frac{3a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} < 2$ $a,b \ne 0$

j) $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \ge \frac{1}{a^2bc} + \frac{1}{ab^2c} + \frac{1}{abc^2}$

2) Arătați că:

a) $\frac{a+b}{2b} \geq \frac{2a}{a+b}, \forall a,b>0$ b) $1+\frac{(a-b)^2}{4ab}>0,\ \forall\ a,b>0$

c) $\forall a,b,c>0$ are loc $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 6$

d) $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p}>\frac{1}{2},\ \forall\ p>1$ e) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \forall\ a,b>0$

3) Să se arate că dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, atunci
$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) < 3(a+b+c)^2$.

4) Să se demonstreze că $\forall\ a,b,c,x,y,z \in \mathbf{R}$ au loc

a) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$; b) $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

5) Arătați că oricare ar fi numerele pozitive a,b,c au loc:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$; b) $(ab+1)(ac+1)(bc+1) \geq 8abc$

6) Dacă $x+y=2$ atunci $x^2+y^2 \geq 2$ și $x^3+y^3 \geq 2$

7) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$, atunci $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq 2$.

8) Dacă $a,b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a+b>0$, atunci: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4}$

9) Să se arate că dacă $a,b,c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{abc}$ atunci $a+b+c \geq 2\sqrt{abc}$

10) Dacă $x,y,z \in \mathbf{R}$ astfel încât $x+y+z=9$ să se arate că $x^2+y^2+z^2 \geq 27$. În ce caz are loc egalitatea?

11) Să se determine valoarea maximă a raportului dintre un număr de două cifre și suma cifrelor sale.

12) Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi, să se demonstreze că:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

13) Să se determine dimensiunile paralelipipedului dreptunghic având lungimea diagonalei dată și a cărui arie totală este maximă.

14) Să se arate că dacă într-un paralelipiped dreptunghic diagonala d este ce mult egală cu unitatea, atunci aria S a acestui paralelipiped este cel mult egală cu 2 unități pătrate. Când aria poate fi minimă? Dar egală cu 2?

15) Fie O,A,B,C patru puncte astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ și se notează $a=OA$, $b=OB$, $c=OC$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Dacă $OH \geq 1$ să se arate că $abc \geq a+b+c$.

FRACȚII ZECIMALE
PREDAREA NOȚIUNII PRIN ÎNTREBĂRI

Titus Grigorovici

" Să facem să treacă totul prin filtrul convingerii elevului, să nu-i băgăm nimic în cap pe baza autorității și încrederii în spusele altuia".

MONTAIGNE

Prelegerea, adică predarea prin prezentarea de către profesor a unei teorii "afișate" direct pe tablă, asigură la matematică parcurgerea unei cantități mari de materie în timp optim. Materia poate fi predată riguros însă este rareori înțeleasă complet de către elevi, în majoritatea cazurilor fiind necesar un ajutor ulterior pentru înțelegerea lecției. Iar dacă aceasta este prezentată într-un mod mai abstract, într-un limbaj cât mai corect, rezultatul predării ajunge să fie dezastruos.

Problematizarea, învățarea prin descoperire și folosirea conversației vor salva elevii de la o oră plictisitoare, plină de o matematică de neînțeles.O variantă extremă a acestei forme de învățare este predarea prin întrebări.Acestea, dacă sunt bine alese, vor orienta elevii pe drumul dorit, dascălul având doar rolul de "regizor din umbră" al lecției. Elevii vor avea impresia că descoperă singuri materia, fapt ce va duce la rezultate deosebite în înțelegerea și însușirea ei. În general se folosește conversația frontală, elementele lecției fiind descoperite inductiv sau prin analogie. Întrebările trebuie astfel puse încât elevii să poată răspunde pe baza unor cunoștințe anterioare sau a unui raționament nu prea complicat (în funcție de nivelul fiecăruia). Pașii logici dintre două întrebări trebuie să fie accesibili clasei iar parcursul ales cât mai apropiat de istoricul descoperirii temei respective.

*

Astfel începea articolul meu despre predarea numerelor complexe, prezentat în numărul 2 al Caietelor PENTAGONIA din Aprilie 1998.

În cele ce urmează vă prezint pe scurt modul în care am predat Capitolul "Fracții zecimale" la Școala Waldorf din Cluj. Iată însă câteva precizări înainte de lecția propriu-zisă. Elevii ieșeau pe rând la tablă, fiecare având de rezolvat un nou exercițiu ce prezenta o nouă situație. Cu câteva exceptii, am folosit deci conversația individuală. În funcție de dificultatea întrebărilor scoteam elevii mai buni sau mai slabi la tablă.

Parcursul ales al lecțiilor se aseamănă oarecum cu istoricul temei și are avantajul că elevii descoperă singuri tot capitolul. Precizez aceasta pentru că, veți vedea, ordinea lecțiilor pare haotică față de cea cu care suntem obișnuiți.

Pentru început profesorul ține un foarte scurt cuvânt de introducere în care scrie titlul capitolului și explică ce înțeleg oamenii mari prin fracții zecimale. Apoi, fără a lămuri deloc noțiunea, iese la tablă primul elev, având sarcina să efectueze o adunare:

LECȚIA I

PROFESOR: Azi vom începe studiul fracțiilor zecimale. Acestea sunt numere de forma:

2,75 ; 0,5 ; 134,2 ; etc.

Să vină primul elev la tablă să facă următoarea adunare:3,27+21,3 *(Profesorul o scrie pe un rând)*

ELEV 1:
```
3,26+
 2 1,3
------
 5 3,9
```

PROF.:După cum vezi ai adunat unitățile de la primul număr cu zecile de la al doilea. Încearcă să corectezi!

ELEV 1:
```
 3,27+
21,3
------
24,57
```

PROF.: Așa este corect. Care ar fi regula de ordonare pentru adunarea fracțiilor zecimale?

UN ELEV DIN CLASĂ: Alinierea trebuie făcută astfel încât virgulele să stea una sub cealaltă.

PROF.: Observăm că nu mai aliniem la dreapta ci după virgulă. Să calculeze cineva următoarea sumă: 12,25 + 3,0765 + 137,6 + 431

ELEV 2:
```
  12,25
   3,0765
 137,6
 431
---------
 583,9265
```

PROF.: Foarte bine! Unde este virgula la un număr întreg?

UN ELEV:După număr, de exemplu 431, .

PROF.: Și după virgulă ce putem scrie?

ELEVUL: Un zero 431,0.

PROF.: Perfect; sau mai multe zerouri. Putem spune că numerele au după virgulă zerouri în buzunar. Să facem și o scădere, de exemplu 32,61 - 9,85 *(Un elev face scăderea la tablă, apoi:)*

PROF.: Să luăm acum altă scădere: 21,5 - 3,14

ELEV 3:
```
21,5 -
 3,14
------
    ?
```

PROF.:Nu ai din ce să-l scazi pe 4. Ce putem face?

ELEV 3: Să punem un zero după 5. Așa putem efectua scăderea.*(Apoi o efectuează).*

(Mai urmează câteva exemple, inclusiv de felul 29 - 3,75 sau 300+30+3+0,3+0,03+0,003, iar apoi tema cuprinzând adunări și scăderi)

LECȚIA II *(după reactualizarea prin câteva exerciții și scrierea rezultatelor principale din lecția I în caiet)*

PROF.:Să încercăm, în continuare, următoarea împărțire:

ELEV: 26,42 : 2=13,21 *(Elevii pun virgula natural după ce au coborât prima cifră după virgulă).*

PROF.: Urmează împărțirea 27,52 : 2

ELEV: 27,52 : 2 = 13,76

PROF.: Să luăm împărțirea 27,31 : 2

(Aici elevii își vor aminti că după 31 mai există zerouri, "în buzunar")

PROF.: Vine rândul unei împărțiri importante, între două numere naturale care nu se divid. *(Profesorul va alege un exemplu care nu duce la periodicitate).*

ELEV: 21 : 5 = 4,1
```
20
--
 1
```

PROF.: A pune restul după virgulă este una dintre cele mai mari greșeli. La exercițiul precedent am văzut că putem continua și o împărțire care nu se termină "exact". Ce trebuie să facem?

ELEVUL: Să coborâm un zero de la 21,000... . Rezultatul este deci 21:5=4,2

PROF.:*(După câteva exemple de fixare).* Iată o altă împărțire: 257,6 : 10

ELEV: 257,6 : 10= 25,76

PROF.: Ce observați?

ELEVII: Virgula s-a mutat la stânga.
PROF.: Bine. Să luăm acum 257 : 10
ELEV: 257 : 10= 25,7
PROF.: Numărul întreg 257 are virgula după unități și nu se scrie. Dacă virgula se mută la stânga atunci se scrie.
PROF.: Știm că împărțirea a două numere se poate scrie sub formă de fracție ordinară. De aici deducem următoarea egalitate:

$$\frac{257}{10} = 25{,}7$$

(Urmează câteva exemple de control cu 100 și 1000):
PROF.: Putem, desigur, scrie și în sens invers:

$$21{,}376 = \frac{21376}{1000}$$

<u>LECȚIA III</u> *(după reactualizarea prin exerciții și scrierea rezultatelor principale din lecția II în caiet):*
PROF.: Lucrăm deja de câteva zile cu fracțiile zecimale, deși încă nu am făcut cunoștință cu ele. De exemplu, nu cunoaștem cum se numesc cifrele de după virgulă. Fie următoarea împărțire:
ELEV: 3 : 10 =0,3
PROF.: Din egalitatea $\frac{3}{10} = 0{,}3$ deducem că prima cifră după virgulă se numește zecime.
(Este posibil ca ideea să vină de la elevi. În continuare apar la fel și sutimile și miimile.)
PROF.: Să efectuăm în continuare și o înmulțire.
ELEV: 2,7 • 3,14= ? *(Elevul aranjează ca la adunare.)*
PROF.: Să folosim un drum ocolitor, pentru a găsi o regulă. Să transformăm în fracții ordinare!
ELEV:

$$2{,}7 \cdot 3{,}14 = \frac{27}{10} \cdot \frac{314}{100} = \frac{8478}{1000} = 8{,}478$$

PROF.: Ce observăm?
ELEVII: Înmulțirea fără virgulă s-a făcut normal. Rezultatul are la partea fracționară atâtea zecimale câte au împreună cele două fracții înmulțite.
(Urmează alte exemple cu înmulțiri,, cum ar fi: 37,6 • 12; 37,6 • 5; 0,31• 0,04 etc.)
<u>LECȚIA IV</u> *(după unele exerciții, discutarea lecțiilor precedente și scrierea rezultatelor principale din lecția III)*
PROF.: Efectuați 25,76 • 10 *(Elevii calculează.)* Ce observați?

ELEVII: Se mută virgula la dreapta cu o poziție.
PROF.: Dar dacă înmulțim cu o sută?
ELEVII: 25,76 • 100= 2576, = 2576. Virgula se mută peste două cifre la dreapta.
PROF.: Ce se întâmplă la 1000?
ELEVII: 25,76 • 1000= 25760 etc.
(După câteva exerciții în care se compară înmulțirea și împărțirea fracțiilor zecimale cu 10, 100, 1000)
PROF.: Se pare că am parcurs toate cele patru operații cu fracții zecimale. Totuși ceva lipsește: împărțirea a două fracții zecimale. De exemplu

$$2{,}72 : 3{,}2$$

ELEVII: . . . . ?
PROF.: Haideți să procedăm ca la înmulțire și să transformăm în fracții ordinare.
ELEV: *(eventual sub îndrumarea profesorului)*

$$2{,}72 : 3{,}2 = \frac{272}{100} : \frac{32}{10} = \frac{272}{10\cancel{0}} \cdot \frac{\cancel{10}}{32} = \frac{272}{10} : \frac{32}{1} = 27{,}2 : 32$$

PROF.: Observăm că s-au mutat virgulele la dreapta, o poziție în ambele numere, până când împărțitorul a devenit întreg. Această împărțire știm să o facem.
ELEV: 27,2 : 32= 0,85
(Urmează alte exemple și tema. Elevii au de adus ora următoare 12 coli A4 și o cariocă groasă)
<u>LECȚIA V</u> *(după discutatrea lecțiilor precedente pe exerciții și scrierea în caiet a regulilor obținute în lecția IV)*
PROF.: Astăzi vom da peste cap ceva învățat în ultimele lecții. Am spus că la împărțirea unui număr cu 10, virgula se mută o poziție la stânga, iar la înmulțirea cu 10 virgula se mută o poziție la dreapta. Să studiem mai atent acest fenomen.
(Se scrie pe nouă coli A4 câte o cifra de la 1 la 9, mare cât coala. Pe celelalte trei coli se pune câte un zero mare. În fața clasei se trasează cu creta pe parchet următoarea schemă, astfel încât în fiecare poziție să încapă lejer un elev:

		M		S	Z	U	,	ZM	SM	MM		

Doisprezece din elevii clasei primesc câte o foaie cu o cifră pe care o țin la piept, ca la concursurile sportive. Un alt elev va ține mătura clasei pe post *de virgulă între unități și zecimi. Acum începe jocul. Profesorul zice un număr, de exemplu 29,315. Elevii cu cifrele respective se vor așeza pe pozițiile corespunzătoare. Apoi profesorul cere împărțirea la 10. După o mică derută, elevii înțeleg mișcarea și se mută corect, de exemplu 9 de pe unități, peste virgula-mătură, pe poziția zecimilor. Apoi profesorul cere înmulțirea cu 100. Elevii vor merge în direcția opusă doi pași. În tot acest timp virgula-mătură rămâne pe loc. Se fac în continuare și alte exemple astfel încât toți elevii să fie pe rând actori și spectatori. În final se trag concluziile:)*

PROF.: Deci dragii moșului, ce se mută la înmulțirea sau împărțirea cu 10, 100, 1000? Virgula?

ELEVII: NUUU!

PROF.: DAR CE?

ELEVII: NUMĂRUL SE MUTĂ!

PROF.: Noi vom păstra pentru viitor ambele variante, atât cea reală în care se mută numărul, bună pentru înțelegerea fracțiilor zecimale, cât și cea aparentă în care se mută virgula, practică la calcule.

*

Urmează lecții cu ordinea operațiilor și, desigur, fracțiile periodice. Predând în acest mod viu fracțiile zecimale, materia va fi mult mai bine stăpânită de elevi, iar lecțiile următoare, cum ar fi transformarea unităților de măsură vor decurge extrem de fluent.

....

DILEMA CERȘETORULUI

Se spune că cerșetorii reusesc să facă, din trei chiștoace de țigări fără filtru, o nouă țigară. Câte țigări va fuma un cerșetor care a adunat zece chiștoace?

<u>Răspuns:</u> Nu vă grăbiți să spuneți "trei țigări și ceva".

Să analizăm situația mai exact. Pentru aceasta vom nota cele zece chiștoace cu a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. În prima fază se obțin trei țigări și anume (a b c), (d e f), (g h i). După fumarea acestora rămân chiștoacele a, d, g și j. Se poate forma o a patra țigara (a d g). După ce fumează și această țigară, cerșetorul nostru rămâne cu două chiștoace a și j. Împrumută de la un coleg un chiștoc x, fumează țigara (x a j) după care înapoiază chiștocul x. Surprinzător, răspunsul este deci: 5 țigări.

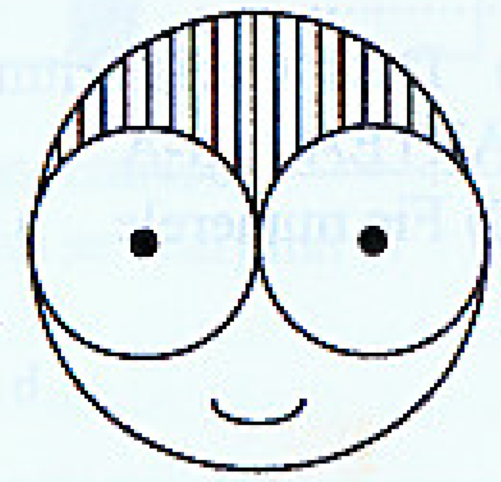
TESTE RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASELOR V, VI, VII

Maria Breckner
Titus Grigorovici

TEST 1

<u>PARTEA I</u>

1) Rezultatul împărțirii lui 1385,8 la 3,25 este ....
2) Latura pătratului cu aria 20,7936 mm^2 este ....
3) Lungimea unui dreptunghi este de 4 ori mai mare decât lățimea iar diferența lor este de 132 cm. Aria dreptunghiului este ....
4) Un triunghi isoscel cu un unghi de 132° are măsurile celorlalte unghiuri de .... și ....
5) Suma primelor 25 de numere naturale este ....
6) O sumă de 80.000 lei se împarte la trei persoane. Primele două primesc 50.000 lei, iar ultimele două primesc 56.000 lei. Câți lei primește fiecare persoană?
7) Raza cercului mare din figura alăturată este R=2cm. Aria porțiunii hașurate este ....



8) Calculand $3\sqrt{125}-3\sqrt{20}-6\sqrt{80}-9\sqrt{5}$ obținem................
9) Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 30 cm, mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea de ....

<u>PARTEA A II-A</u>

10) Fie numerele $M=[2^2\cdot 2^3-2^2\cdot(5-4)]:2^2+(2^3+2)^2:5$ și $T=6+2\cdot[(2+2^2\cdot 3)-1]$.
   a) Calculați cele două numere;
   b) Găsiți cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun.
11) Oricare ar fi numerele $a, b, c, \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații: i) dacă $a^2=b^2$ atunci $a=b$;
   ii) dacă $\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$ atunci $b=c$.
12) Fie ABCD un trapez oarecare cu bazele (AB) și (CD) iar O intersecția diagonalelor sale. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele în M și N.

Arătați că : a) $[OM]\equiv[ON]$; b) $\frac{MN}{AB}+\frac{MN}{CD}=2$