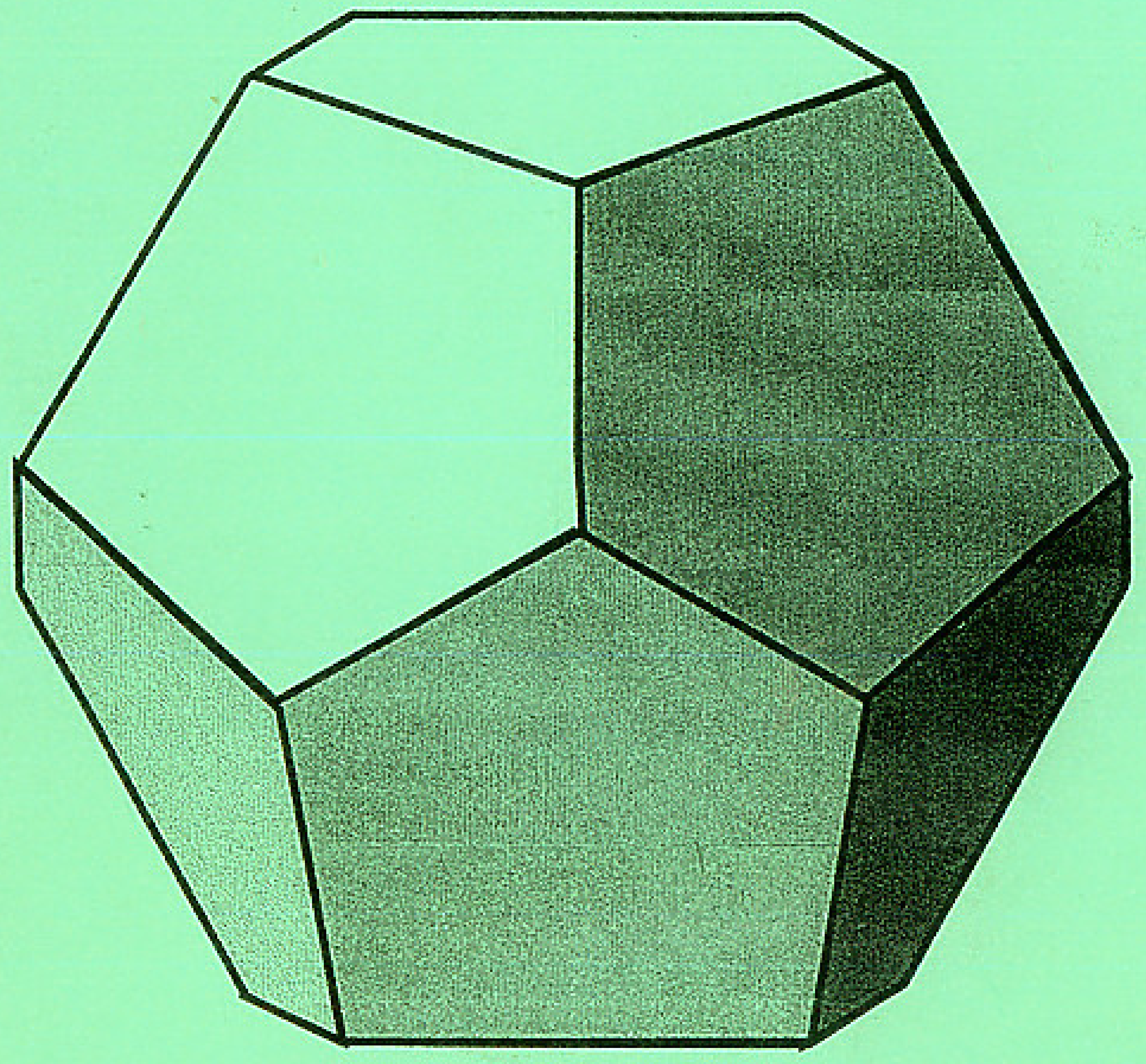
În caietul următor:
- Echerul geometric
- Predarea numerelor zecimale
- Icosaedrul
- 101 inegalități
- Numere bărbătești - numere femeiești

ISBN: 973-9196-24-1
Editura TRIADE

NUMĂRUL 3 - DECEMBRIE 1998

P3NT4GON1A



CAIET TRIMESTRIAL
DE MATEMATICĂ

FRĂMÂNTĂRI DĂSCĂLEȘTI

Că matematica este latina secolului al XX-lea este un lucru de care mulți dintre noi suntem conștienți. Noi, oamenii de pretutindeni, facem cunoștință cu „Doamna Matematică" din primii ani de viață; poate chiar din prima clipă în care ne numărăm jucăriile, darurile sau bătăile inimii. Nimeni nu știe exact. Oricum nu cred că are importanță momentul. Important rămâne faptul că ea se strecoară delicat și repede în viața noastră și rămâne ca o prietenă fidelă până la sfârșit.

Dar oare noi am învățat să-i fim suficient de fideli? Câți dintre noi cre că matematica așteaptă și să fie iubită? Câți dintre noi simt și căldura și povestea și poezia matematicii? Răspunsul este unul trist, dar care pune sau ar trebui să pună pe gânduri pe toți cei aflați în slujba matematicii. Din păcate matematica rămâne în continuare pentru elev un subiect rece, sobru, distant, necesar doar pentru teze, examene sau olimpiade, făcându-i pe elevi să folosească de cele mai multe ori un verb impersonal care sigur nu place nimănui: "trebuie".

Există totuși profesori care lasă la ușa clasei și verbul "trebuie" și orgoliul de profesor cu "rezultate" la olimpiade și prejudecățile. Aceștia intră cu dreptul în clasă având pregătite nu doar exerciții și probleme ci și povești, istorioare, căi originale pentru înțelegerea problemelor, care să facă matematica atractivă, să îi facă pe elevi să participe afectiv și efectiv.

Trecând din planul ideilor în cel al faptelor concrete, vă prezentăm în acest caiet: o poveste despre numere prietene, un scurt istoric al numerelor pitagorice, o metodă inedită de desenare a figurilor geometrice și un lămpaș pentru sărbătorile de iarnă pe baza dodecaedrului.

Pentru a nu pune de-o parte problemele cu care se confruntă zi de zi atât profesorii cât și elevii, am ales două teme dificile, dar de interes pentru examenele de la finele clasei a VIII-a: ecuațiile cu parametri și problemele legate de funcția de gradul I. Ambele teme au fost importate din liceu și reprezintă pietre de încercare prea grele puse pe umerii elevilor; asta în mare parte pentru că sunt însoțite de rezolvări adresate gândirii și experienței elevului de liceu. Noi vă prezentăm adaptarea acestor metode de rezolvare a problemelor la nivelul elevilor de gimnaziu.

Toate aceste frământări dăscălești s-au născut din dorința de armonizare cu marea componentă pozitivă a reformei, răspunzând cerinței de bază care sintetizează miezul acesteia: "trebuie pus accent nu pe ceea ce elevul știe, ci pe ceea ce el știe să facă prin ceea ce știe".

Corina Lupuțan & Titus Grigorovici

CUPRINS

Acest caiet a apărut cu sprijinul imprimeriei PRINTEK, Cluj.

Comenzi, sugestii și propuneri de probleme sau teme de abordat sunt așteptate la adresa redacției: Titus Grigorovici, str.Fabricii nr.9, ap.27, 3400 Cluj-Napoca, sau la Editura TRIADE CP 1-400, 3400 Cluj-Napoca.

NUMERELE DE-A LUNGUL ISTORIEI

Începând cu acest caiet Pentagonia, vom încerca să vă prezentăm modul în care erau percepute numerele în vremurile străvechi, cum făceau matematică marii înțelepți de-a lungul istoriei.

Ceea ce înțelegem astăzi prin numere, adică o simplă cantitate neînsuflețită compusă din unități, ar fi fost de neînchipuit pentru matematicienii antichității. Personificarea numerelor era cel mai obișnuit lucru, calitățile și defectele acestora fiind admirate sau disprețuite la fel ca și calitățile sau defectele oamenilor.

Și unde ar fi mai potrivit să începem decât la școala lui Pitagora (sec. VI î.Cr.) unde se considera că numerele guvernează lumea? Din multele preocupări ale pitagoreicilor am ales pentru articolul de față teoria despre numere perfecte și numere prietene.

Pornind de la faptul că divizorii numărului 6 sunt 1, 2 și 3 (în antichitate numărul însuși nu era considerat divizor), ușor putem observa că suma acestor divizori este tot 6. Ne punem, pe bună dreptate, întrebarea dacă mai există și alte numere cu această proprietate remarcabilă. Grecii antici au mai găsit și altele: 28; 496; 8.128; 33.550.336; ... numindu-le "ARITHMOS TELEIOS" (numere perfecte, desăvârșite). De exemplu:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31+ + 62 + 124 + 248$$

Cum se comportă celelalte numere față de această proprietate? La cele mai multe suma divizorilor este mai mică decât numărul de pornire (numere subperfecte). De exemplu, divizorii lui 10 sunt 1, 2 și 5 iar $1 + 2 + 5 = 8$. Există, însă, și unele numere, mai rare, la care suma divizorilor depășește numărul de pornire (numere supraperfecte). La 12 avem $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

Nu ne putem abține aici de la o comparație cu comportamentul oamenilor. Cei mai mulți oameni valorează mai puțin decât arată la prima vedere. Dimpotrivă, cei modești nu arată în exterior tot ceea ce pot da. Cei perfecți, la care se vede în exterior exact valoarea lor, sunt foarte rari.

Și la fel ca la oameni, numerele se pot completa unul pe celălalt. Astfel, numerele 220 și 284 sunt fiecare egale cu suma divizorilor celuilalt. Pitagoreicii le numeau "PHILOI ARITHMOI" (numere prietene). Următoarea pereche de numere prietene a fost găsită abia în anul 1636 de Pierre Fermat: $17296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$ și $18416 = 2^4 \cdot 1151$

În 1644 a fost găsită a treia pereche: 9363584 și 9437056.

Există și o mică povestire pe această temă. Întrebat cum ar caracteriza o prietenie ideală dintre doi oameni, se spune că Pitagora ar fi dat următorul răspuns: "acei oameni vor fi cu adevărat prieteni, care se vor purta unul față de celălalt aidoma numerelor 220 și 284".

Aceste străvechi teorii sunt atractive la orice vârstă, ele putând fi prezentate chiar din clasa a V-a când elevii au cea mai mare deschidere și receptivitate față de frumusețea și perfecțiunea civilizației Greciei antice.

BIBLIOGRAFIE:

1)ERNST BINDEL - DIE GEISTIGEN GRUNDLAGEN DER ZAHLEN, 1958

2) MIHU CERCHEZ - PITAGORA, 1986

PROBLEMA GĂINILOR

Atracția față de matematică izvorăște în mare parte din probleme simple dar incredibile, probleme care te stârnesc să pui mâna pe creion și să-i dai de capăt. Iată o astfel de problemă, al cărei răspuns, sigur nu este "nouă ouă":

La o fermă avicolă specialiștii au stabilit că, în medie, o găină și jumătate depune într-o zi și jumătate un ou și jumătate. Să se calculeze câte ouă depun nouă găini în nouă zile!

Rezolvare:

1,5 găini .... 1,5 zile .... 1,5 ouă

1,5 x 6 = 9 găini .... 1,5 zile .... 1,5 x 6 = 9 ouă

9 găini .... 1,5 x 6 = 9 zile ..... 9 x 6 = 54 ouă

Deci, nouă găini depun în nouă zile 54 ouă.

NUMERE PITAGORICE

Relația din teorema lui Pitagora era cunoscută pentru anumite cazuri particulare cu mult înainte ca marele învățat grec să o enunțe și să-i demonstreze valabilitatea pentru toate triunghiurile dreptunghice.

În marea piramidă a lui Keops (2500 î.Ch.) de exemplu, apotema bazei, înălțimea și apotema piramidei sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 5 (cu o eroare de 2%). Acest triunghi era folosit în general pentru determinarea unghiurilor drepte pe teren, în construcția templelor și în agricultură. Astfel, egiptenii foloseau o frânghie legată la capete și împărțită în 12 părți egale, care era fixată cu trei țăruși în forma unui triunghi cu laturile de 3, 4 și 5 (triunghiul egiptean).

Și preoții din vechea Indie posedau o metodă asemănătoare de trasare a unghiurilor drepte, folosind triunghiul cu laturile de 5, 12 și 13 (triunghiul indian).

*

Cel târziu la începutul clasei a VIII-a, elevii încep să observe că anumite numere întregi apar des în aplicarea teoremei lui Pitagora, pentru început, problemele care au rezultate astfel de numere întregi fiind favoritele elevilor. Este vorba de numerele pitagorice reprezentând triplete de numere naturale (x, y, z) ce verifică egalitatea din teorema lui Pitagora ($x^2 + y^2 = z^2$) și pot fi deci, lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

Evident, dacă (x, y, z) este un triplet de numere pitagorice, atunci și (nx, ny, nz) sunt numere pitagorice. De exemplu, din tripletul (3, 4, 5) putem obține, prin amplificare, alte numere pitagorice: (6,8,10), (9,12,15), (30,40,50) etc.

Înțelegerea acestor numere și reținerea celor mai des întâlnite triplete îi poate ajuta mult pe elevi, oferindu-le și o metodă simplă de verificare a calculelor din probleme. Vă prezentăm în continuare toate cele 52 de triplete de numere pitagorice până la 100.

x	y	z	$x^2+y^2=z^2$
3	4	5	9+16=25
6	8	10	36+64=100
9	12	15	81+144=225
12	16	20	144+256=400
15	20	25	225+400=625
18	24	30	324+576=900
21	28	35	441+784=1225
24	32	40	576+1024=1600
27	36	45	729+1296=2025
30	40	50	900+1600=2500
33	44	55	1089+1936=3025
36	48	60	1296+2304=3600
39	52	65	1521+2704=4225
42	56	70	1764+3136=4900
45	60	75	2025+3600=5625
48	64	80	2304+4096=6400
51	68	85	2601+4624=7225
54	72	90	2916+5184=8100
57	76	95	3249+5776=9025
60	80	100	3600+6400=10000
5	12	13	25+144=169
10	24	26	100+576=676
15	36	39	225+1296=1521
20	48	52	400+2304=2704
25	60	65	625+3600=4225
30	72	78	900+5184=6084
35	84	91	1225+7056=8281
8	15	17	64+225=289
16	30	34	256+900=1156
24	45	51	576+2025=2601
32	60	68	1024+3600=4624
40	75	85	1600+5625=7225

x	y	z	$x^2+y^2=z^2$
7	24	25	49+576=625
14	48	50	196+2304=2500
21	72	75	441+5184=5625
28	96	100	784+9216=10000
20	21	29	400+441=841
40	42	58	1600+1764=3364
60	63	87	3600+3969=7569
12	35	37	144+1225=1369
24	70	74	576+4900=5476
9	40	41	81+1600=1681
18	80	82	324+6400=6724
28	45	53	784+2025=2809
11	60	61	121+3600=3721
16	63	65	256+3969=4225
33	56	65	1089+3136=4225
48	55	73	2304+3025=5329
13	84	85	169+7056=7225
36	77	85	1296+5929=7225
39	80	89	1521+6400=7921
65	72	97	4225+5184=9409

BIBLIOGRAFIE:

1) MIHU CERCHEZ - PITAGORA, 1986
2) EGMONT COLERUS - VOM EINMALEINS ZUM INTEGRAL, 1939

DESENE PE PĂTRĂŢELE

Titus Grigorovici

Deşi oficial nu există o astfel de metodă, mulţi matematicieni, profesori sau elevi, folosesc pătrăţelele din caietul de matematică pentru realizarea figurilor geometrice. Majoritatea acestora se mulţumesc însă cu unele elemente simple cum ar fi construcţia unghiurilor de 45° folosind diagonala pătrăţelelor (fig 1), sau construcţia paralelogramelor, desenând cele două baze de aceeaşi lungime, decalate cu 2-3 pătrăţele, pe două linii orizontale din caiet (fig. 2). Se foloseşte în acest caz cunoscuta teoremă care spune că un patrulater cu două laturi opuse paralele şi congruente este paralelogram.

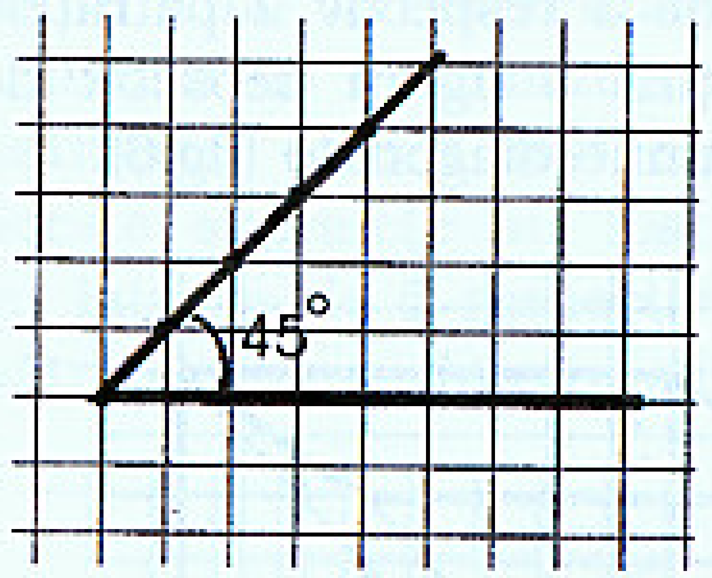


fig.1

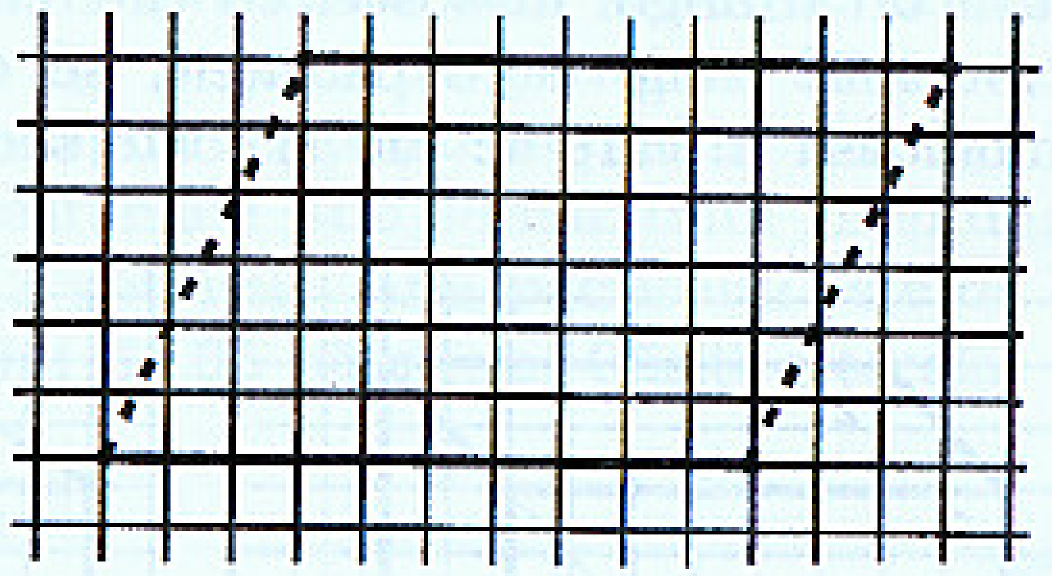


fig.2

Vă prezentăm în continuare trei exemple mai complexe şi o problemă pe această temă. Vom folosi pentru aceasta limbajul curent al elevilor, înţelegând prin "pătrăţel" în funcţie de conjunctură, unitatea de lungime (0,5cm) sau unitatea de arie (0,25cm²).

1) Un triunghi echilateral se obţine foarte uşor construind baza de 8 pătrăţele şi din mijlocul ei, înălţimea de 7 pătrăţele (fig.3). "Imposibil" veţi răspunde, şi veţi avea dreptate: acest triunghi nu este echilateral, dar în practică figura nu este cu nimic mai prejos decât orice triunghi echilateral desenat prin metodele clasice. Într-adevăr, calculând în ΔABD, latura $AB \cong 8{,}06$ (pătrăţele), cu o eroare de 0,3 mm, nesesizabilă cu ochiul liber.

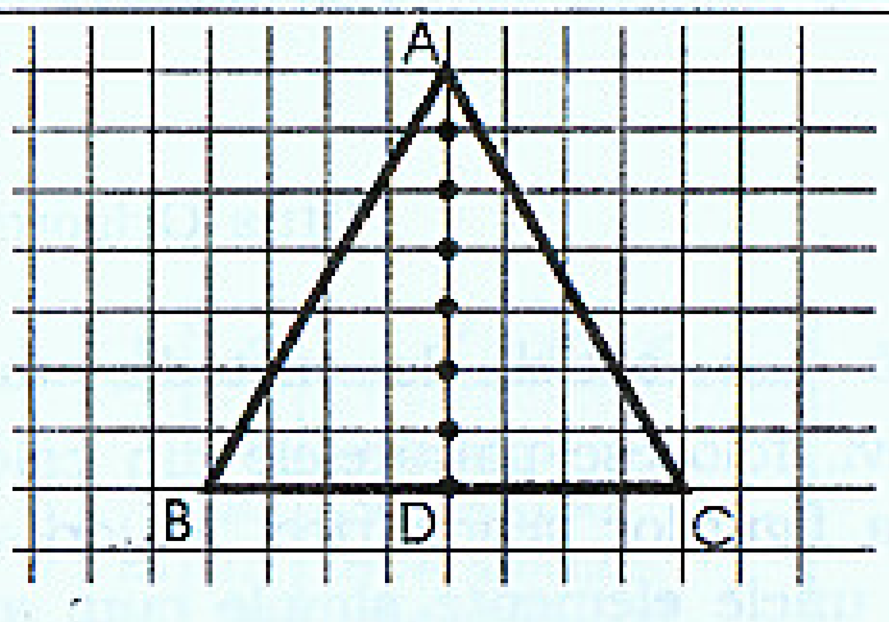


fig.3

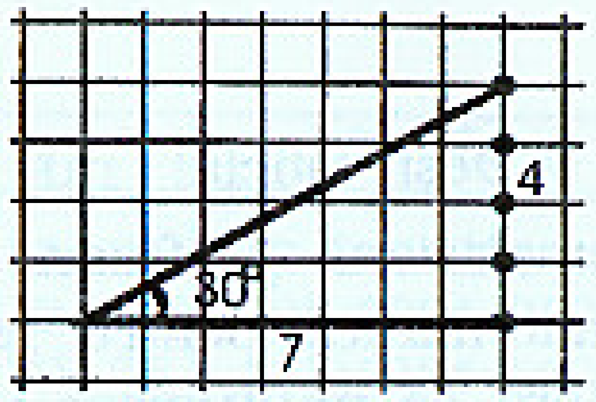


fig.4

Adaptând metoda, putem construi unghiuri de 30° sau 60° folosind triunghiul dreptunghic cu catetele de 4 și 7 pătrățele (fig.4).

1) O greșeală tipică în desenarea cuburilor este aceea că una din secțiunile diagonale nu se vede (fig.5). Alegând în colțul figurii un triunghi neisoscel cu catetele de 3 respectiv 2 pătrățele și muchiile lungi de 8 pătrățele, se obține o figură deosebit de armonioasă în care se văd și toate secțiunile diagonale (fig.6).

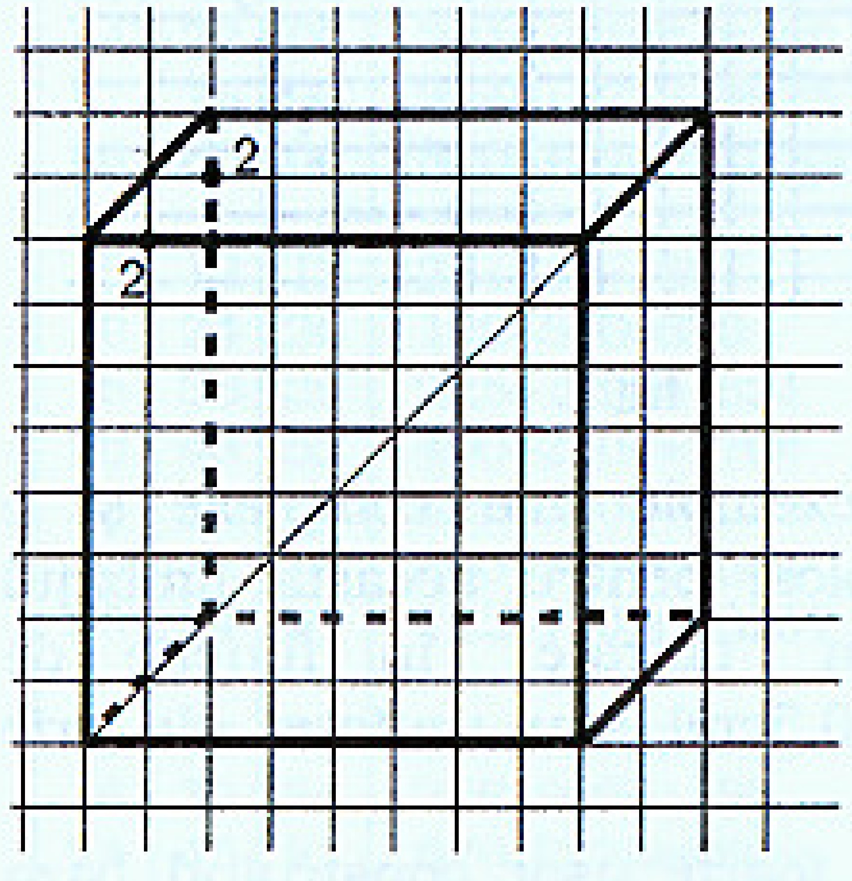


fig.5

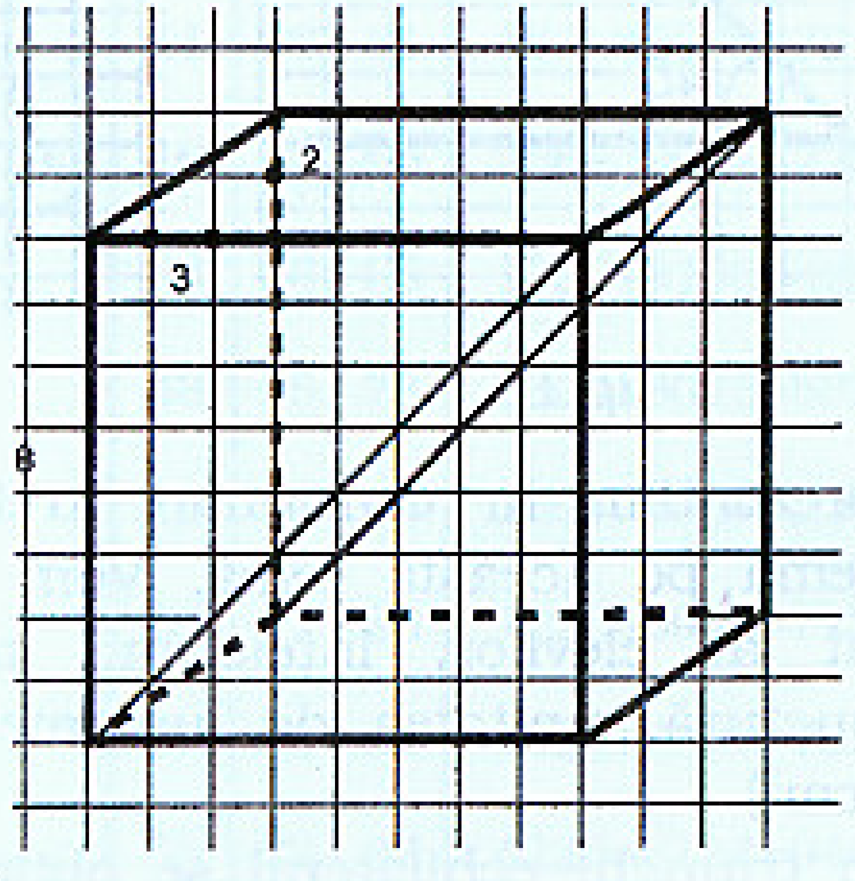


fig.6

3) Funcția f : **R** → **R**, f(x) = 2x - 1 poate fi reprezentată grafic folosind următoarele:

i) dreapta grafic intersectează axa Oy în punctul de ordonată y=-1.

ii) dreapta are o înclinație (creștere) de 2 unități la fiecare unitate în sensul pozitiv al axei Ox (fig.7)

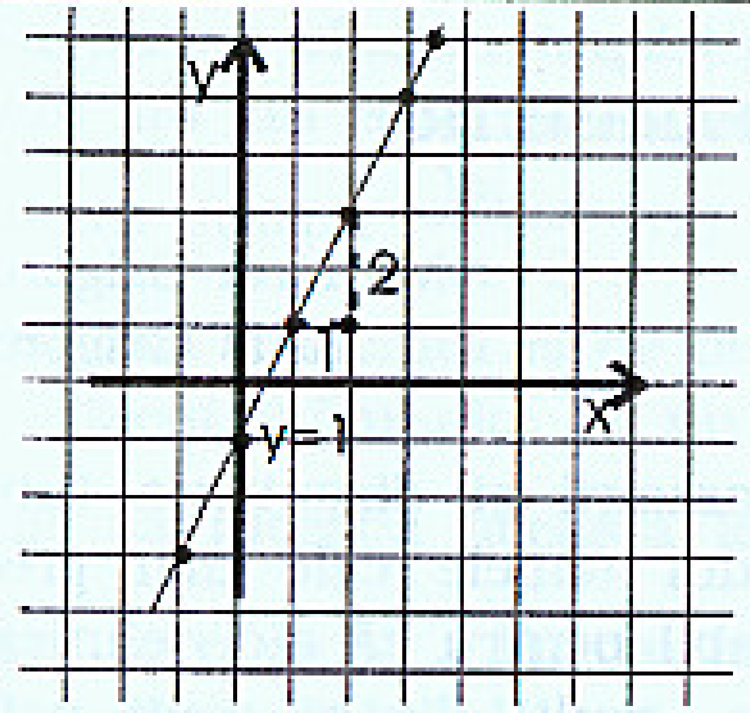


fig.7

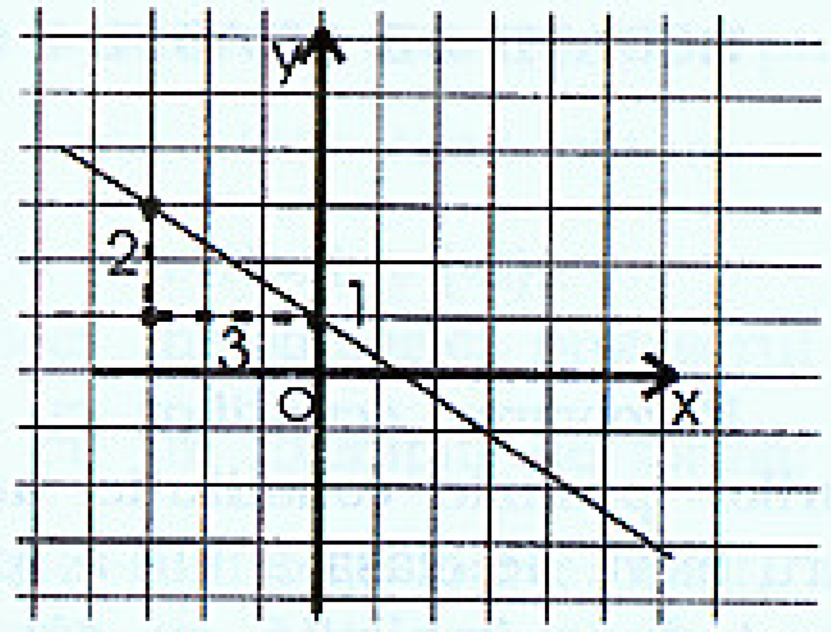
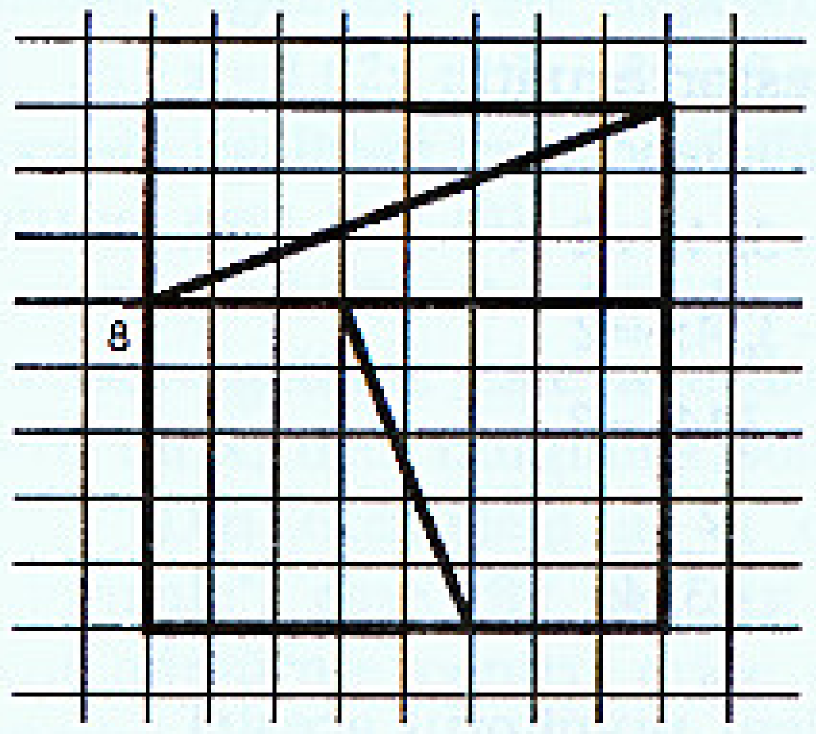


fig.8

În fig. 8 este reprezentată grafic, prin același procedeu, funcția $g : R \rightarrow R,\ g(x) = -\frac{2}{3}x + 1.$

2) În final vă prezentăm și o problemă care folosește liniatura caietului de matematică. În fig. 9 avem un pătrat cu latura de 8 pătrățele, care a fost descompus în patru suprafețe. În fig. 10, aceste suprafețe au fost rearanjate sub forma unui dreptunghi cu laturile de 5 respectiv 13 pătrățele. Aria pătratului este de 64 pătrățele iar a dreptunghiului de 65 pătrățele. Găsiți greșeala!



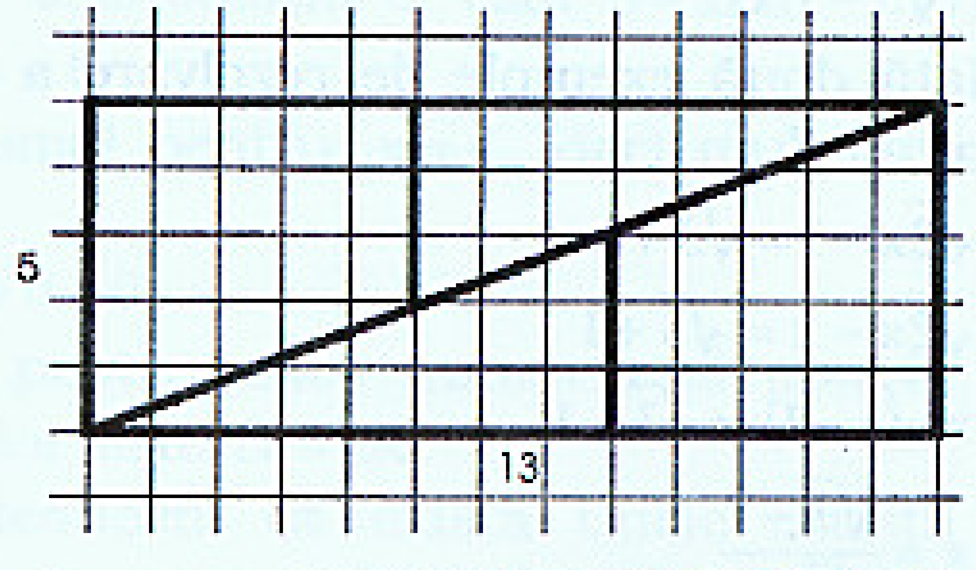


fig.10

fig.9fig.10

În loc de recompunerea sub forma unui dreptunghi, putem alege triunghiul isoscel din fig.11 având tot aria de 65 pătrățele.

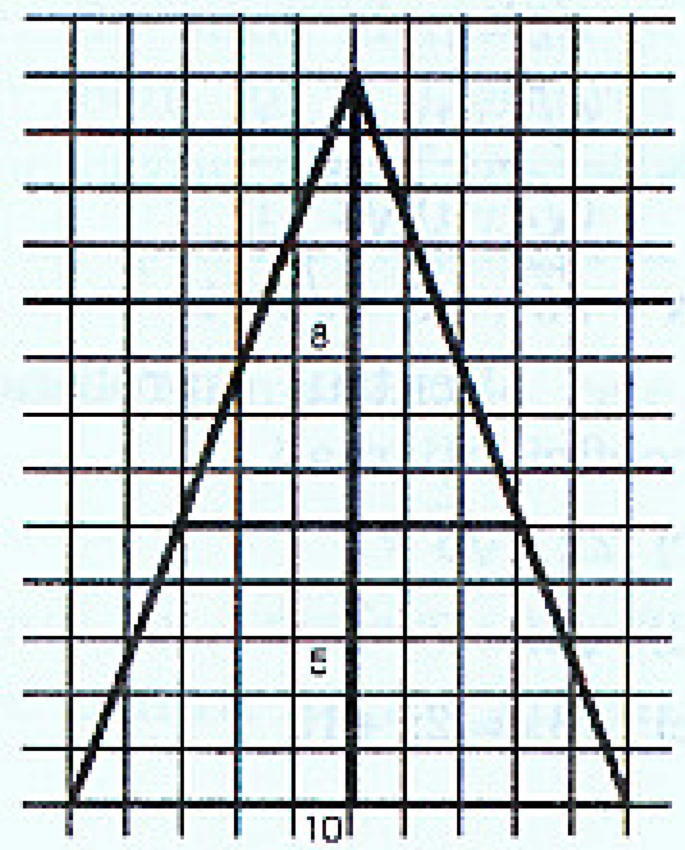


fig.11

ECUAŢII DE GRADUL I CU PARAMETRU

Mariana Grigorovici
Titus Grigorovici

Rezolvarea ecuaţiilor cu parametrii şi discutarea tuturor cazurilor posibile constituie una din temele cele mai greoaie pentru elevii de clasa a VIII-a, probabil pentru că aici tehnica de lucru trebuie împletită cu gândirea, mulţi dintre copii nefiind pregătiţi pentru aceasta. În aceste condiţii este necesară "despicarea firului în patru" prin pregătirea şi clarificarea fiecărui pas de parcurs. Astfel, vă propunem pentru început următoarele teme pregătitoare: ecuaţii cu coeficienţi reali, domeniul de definiţie al unei fracţii algebrice şi cazurile de soluţie a unei ecuaţii de gradul I.

I) În ecuaţiile cu coeficienţi iraţionali, tehnica de lucru este, în unele momente, diferită faţă de cazul coeficienţilor raţionali. Operaţii de genul $\sqrt{2}+1$ sau $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ rămân neefectuate, în schimb în cazul $\sqrt{3}x-x$, folosind factorul comun, obţinem $((\sqrt{3}-1)x$.

Iată două exemple de rezolvare a acestor ecuaţii:

a)

$$\sqrt{2}x-1=\sqrt{3}+x$$
$$\sqrt{2}x-x=\sqrt{3}+1$$
$$x(\sqrt{2}-1)=\sqrt{3}+1$$
$$x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}-1}$$
$$x=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$x=\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$$

b)

$$\pi x=3{,}14x+2$$
$$\pi x-3{,}14x=2$$
$$x(\pi-3{,}14)=2$$
$$x=\frac{2}{\pi-3{,}14}$$

Evident numitorul acestei fracţii nu este zero.

Pentru aprofundare rezolvaţi următoarele ecuaţii cu coeficienţi reali.

c) $2x-\sqrt{3}=1$

d) $\sqrt{2}x+7=5$

e) $\sqrt{3}x=2x+10$

f) $\sqrt{10}x+2=\sqrt{2}+3x$

g) $\pi x-x=9$

h) $\pi x-5=3\sqrt{2}+\sqrt{2}x$

II) Nu putem efectua împărţirile la zero, de exemplu 5 : 0. Prin urmare nu au sens fracţiile cu numitorul zero. Astfel, putem spune că fracţia $\frac{3m-5}{m+2}$ nu are sens atâta timp cât m = - 2. Spunem că domeniul ei de definiţie este D=**R** \ {-2}.

Menţionăm aici şi un aspect metodologic: profesorul nu trebuie să înceapă această lecţie cu un exemplu de forma: $\frac{5}{m}$ pentru care $m\neq 0$. Prima impresie contează foarte mult, unii elevi rămânând cu idea că „$m\neq 0$" în loc de „numitorul $\neq 0$" Şi tot ca o observaţie metodologică, reamintim că fracţia de la exemplul I b) nu are numitorul zero. Numărul $\pi-3{,}14\cong 0{,}00159$ poate fi numitorul unei fracţii.

Stabiliţi în continuare, pentru ce valori ale lui m nu au sens următoarele fracţii:

c) $\frac{3}{m-1}$; d) $\frac{m-1}{3m}$; e) $\frac{m+\sqrt{3}}{m+\sqrt{2}}$; f) $\frac{2m-1}{m^2-9}$; g) $\frac{5m}{m^2+1}$

III) Din punct de vedere al soluţiei unei ecuaţii de gradul I, există trei posibilităţi. Iată exemplificarea acestora:

a) $3x-x=8+2x \Leftrightarrow 2x-2x=8 \Leftrightarrow 0=8$

Această egalitate este imposibilă, deci soluţia ei este $S=\emptyset$

b) $5x-x=8+2x \Leftrightarrow 4x-2x=8 \Leftrightarrow 2x=8$

Această egalitate este posibilă numai pentru $x=4$, deci mulţimea soluţiei este S = {4}

c) $3x-x=8+2x-8 \Leftrightarrow 2x-2x=0 \Leftrightarrow 0=0$

Această egalitate este adevărată pentru orice număr real pus în locul lui x, deci mulţimea soluţiilor este S = **R**.

Din exemplele a) şi c) deducem că există unele ecuaţii „anormale", care, fie nu au nici o soluţie, fie sunt identităţi şi sunt adevărate pentru orice număr pus în locul lui x. Gândirea elevului cuprinde cu greu realitatea acestor cazuri, fiind necesar un ajutor deosebit din partea dascălului pentru înţelegerea acestor ciudate extinderi ale ecuaţiilor.

Pentru aceasta, verificaţi următoarele exemple numerice pe cele trei ecuaţii de mai sus:

$x=-2$; $x=0$; $x=\sqrt{2}$; $x=4$; $x=8$

Unii profesori finalizează exerciţiul a) astfel: $0x=8$ explicând că această ecuaţie nu are soluţie pentru că nu putem împărţi $8:0$. Finalul acesta derutează însă mulţi elevi, care dau acelaşi răspuns şi la ecuaţia:

d) $3x+2=2-5x \Leftrightarrow 8x=0$

Această ecuaţie are soluţia $x=0:8 \Leftrightarrow x=0$ şi este în aceeaşi categorie cu exerciţiul b).

Pentru verificare, rezolvaţi după modelele exemplelor a)-d) următoarele ecuaţii:

e) $5x-2+3x=8x-2$

f) $x+4-5x=5-4x$

g) $7x-3=3x-7$

h) $\sqrt{2}x-3=\sqrt{2}x+3$

i) $9x-1=2x-1$

j) $5+\sqrt{2}x+1=\sqrt{2}x+4$

În continuare vă prezentăm două cazuri clasice de ecuaţii cu parametru, dar şi două cazuri particulare pe care mulţi profesori uită a le prezenta elevilor, contribuind la neînţelegerea fenomenului. Observaţi, totodată, că rezolvările parcurg, în general, trei etape, corespunzătoare celor trei teme pregătitoare:

I - rezolvarea ecuaţiei

II - analizarea numitorului fracţiei şi depistarea valorilor parametrului pentru care acest numitor devine zero.

III - rezolvarea ecuaţiei în cazul găsit la etapa II, pentru care împărţirea din final nu se poate efectua.

Să rezolvăm şi să discutăm, aşadar, următoarele ecuaţii cu un parametru.

a) $mx-2=3m+x \Leftrightarrow mx-x=3m+2 \Leftrightarrow x(m-1)=3m+2$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3m+2}{m-1}$$

Fracţia obţinută există doar dacă numitorul $m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Avem astfel:

Cazul 1) Pentru $m\neq 1 \Rightarrow S=\left\{\frac{3m+2}{m-1}\right\}$. Altfel avem:

Cazul 2) Pentru $m=1$ nu este definită fracţia obţinută. Înlocuim $m=1$ în ecuaţia iniţială:

$1x-2=3\cdot 1+x \Leftrightarrow x-x=3+2 \Leftrightarrow 0=5$ imposibil $\Rightarrow S=\emptyset$

b) $m+x=mx+1 \Leftrightarrow x-mx=1-m \Leftrightarrow x(1-m)=1-m$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1-m}{1-m}$$

Punând condiţia $1-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$ avem iarăşi două posibilităţi:

Cazul 1) Dacă $m\neq 1 \Rightarrow x=\frac{1-m}{1-m} \Leftrightarrow x=1$ şi $S=\{1\}$

Cazul 2) Dacă $m=1$, ecuaţia iniţială devine

$1+x=1\cdot x+1 \Leftrightarrow x-x=1-1 \Leftrightarrow 0=0$

adevărat pentru orice $x \Rightarrow S=\mathbf{R}$

c) $m^2x-5=m-x \Leftrightarrow m^2x+x=m+5 \Leftrightarrow x(m^2+1)=m+5$

$$\Leftrightarrow x=\frac{m+5}{m^2+1}$$

Numitorul acestei fracţii nu poate fi zero pentru nici un $m\in R$ ($m^2\geq 0 \Rightarrow m^2+1>0$)

În aceste condiţii nu mai avem discuţie pe cazuri şi $S=\left\{\frac{m+5}{m^2+1}\right\}$ pentru $\forall m\in\mathbf{R}$

d) $3x-6m=5+x \Leftrightarrow 3x-x=6m+5 \Leftrightarrow 2x=6m+5 \Leftrightarrow$

$$x=\frac{6m+5}{2}$$

Nici nu mai trebuie analizat numitorul fracţiei, acesta fiind 2, evident diferit de zero.

Aşadar $S=\left\{\frac{6m+5}{2}\right\}$, $\forall m\in\mathbf{R}$.

Întrerupem din nou parcursul acestei lecţii pentru o ultimă observaţie de ordin metodologic. Riguros matematic, discuţia pe cazuri de la exemplele a) şi b) trebuie făcută înainte de împărţirea finală şi scrierea fracţiilor $x=\frac{3m+2}{m-1}$ respectiv $x=\frac{1-m}{1-m}$. În acest caz însă, majoritatea elevilor nu mai înţeleg de ce se face discuţia, lipsind motivul. O vor face, totuşi, sârguincioşi, discutând pe cazuri chiar şi la exemplele c) şi d). Din contră, dacă elevii învaţă să scrie întâi fracţia respectivă, apoi să-i analizeze imediat numitorul, vor înţelege necesitatea discuţiei pe cazuri şi dacă este nevoie să o facă. Greşeala în acest caz este neglijabilă în comparaţie cu câştigul obţinut.

Folosind modelele de mai sus, rezolvaţi următoarele ecuaţii cu parametru, analizând la fiecare toate cazurile posibile.

Exerciții

1) Să se rezolve și să se discute ecuațiile după valorile parametrului real m:

a) $mx-5=m$ b) $mx+6=x+m$ c) $mx+2=3x-m$

d) $mx-3x+4m=5$ e) $x=3-mx$ f) $mx-2=3x$

g) $mx-2m-1=0$ h) $mx=4-2x$

2) Rezolvați ecuațiile cu necunoscuta x:

a) $5x-m=7$ b) $3x-m=x$ c) $m^2-3=-x$

d) $3(x-1)=m+1$ e) $m(x-2)-2x=mx-2(m-2)$

3) Rezolvați ecuațiile în toate cazurile posibile $(m\in\mathbf{R})$

a) $2mx=x+2m-1$ b) $m^2x+1=m+x$

c) $mx-1=m-x$ d) $m^2x-m=4x+2$

e) $m(mx-1)=mx-1$

4) Rezolvați ecuațiile:

a) $(m+3)x-5=0$; $m\in\mathbf{R}$

b) $a^2x=3x$; $a\in\mathbf{R}$

c) $ax=0$; $a\in\mathbf{R}$

d) $mx=3$; $m\in\mathbf{R}$

5) Discutați toate cazurile posibile ale ecuațiilor

a) $(m^2-6m+8)x=m-4$

b) $x-m=\frac{x-2}{m-2}+1$

c) $\frac{x-m}{x+5}=\frac{m}{3}$

Obs: ecuația nu poate admite soluția $x=-5$. Discuție.

6) Discutați ecuațiile după valorile parametrilor reali a și b.

a) $bx+x=a$ b) $\frac{1}{7}(a+x)=\frac{2}{7}(x-b)$ Ș c) $4ax+b=-2bx+4a$

CORPURI PLATONICE (2)

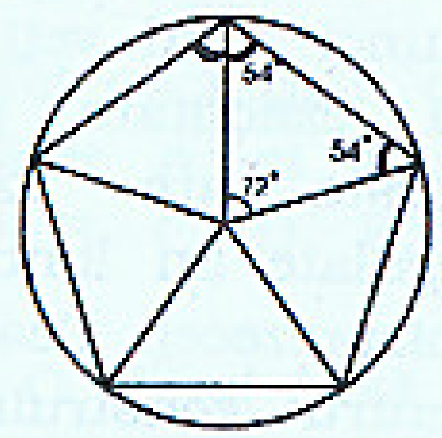
A propune cititorilor o serie de articole despre corpurile platonice, poate fi cosiderat un act necugetat. Cine se mai interesează astăzi de structuri geometrice care nu joacă un rol important nici în tehnică, nici în arhitectură, fiind tot mai greu de găsit și în diferitele cărți de matematică; doar enciclopediile se mai obosesc să le amintească existența. Chiar și faptul că aceste corpuri i-au fascinat pe marii gânditori ai omenirii, ne lasă indiferenți atâta vreme cât la examene nu se dau exerciții legate de ele. În plus trebuie ținut cont și de frica față de complexitatea corpurilor platonice, chiar dacă toți sunt atrași de frumusețea lor.

Articolul de față își propune să vă convingă atât de accesibilitatea teoriei acestor corpuri, cât și de frumusețea lor nebănuită.

III. CÂTE POLIEDRE REGULATE EXISTĂ?

Chiar din clasa a VII-a, elevii pot demonstra faptul că există doar cinci poliedre regulate, parcurgând următorii pași.

Încercând să construim poliedre regulate cu fețe triunghiuri echilaterale, altele decât tetraedrul regulat, ne punem întrebarea, câte fețe se pot învecina într-un vârf. Șase unghiuri cu măsura de 60°, alăturate, cu vârful și câte o latură comună, acoperă 360° în jurul vârfului, formând o structură plană. Pentru a obține o structură în spațiu, reprezentând colțul unui poliedru, sunt necesare unghiuri însumând mai puțin de 360°. Astfel, putem pune cel mult cinci unghiuri de 60° alăturate. Putem lua, însă, și numai patru sau trei unghiuri de 60° provenind din triunghiur echilaterale.

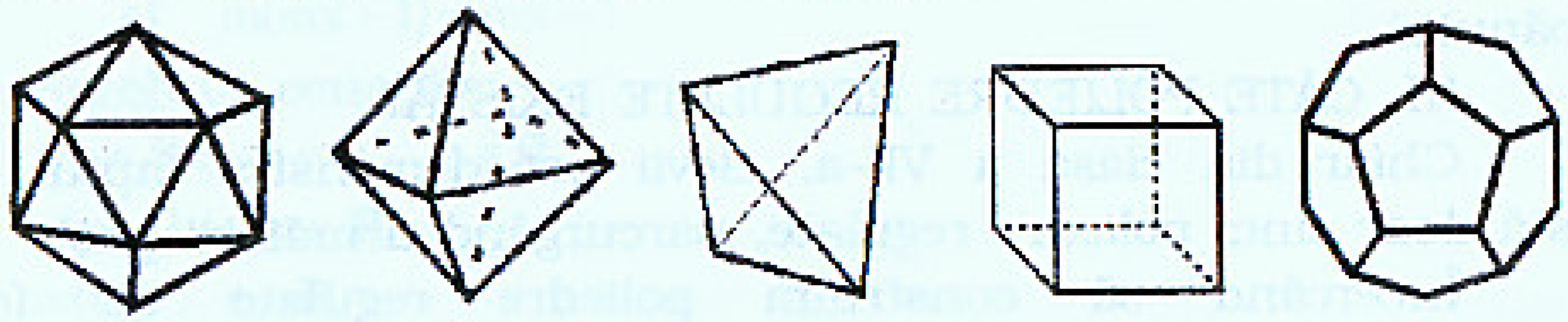


Dacă vrem să construim poliedre regulate cu fețe pătrate, avem o singură posibilitate, anume 3 x 90° = 270°. La 4 x 90° se obține un colț plan.

În figura alăturată, folosind doar materia de clasa a VI-a putem stabili că unghiurile pentagonului regulat au măsura de 108°. Refăcând raționamentul de la fețele pătrate, observăm că și aici există o singură posibilitate: 3 x 108° = 324°.

Încercând să căutăm un poliedru regulat cu fețe hexagonale, observăm că, la un minim de trei fețe într-un colț, obținem deja o rețea plană: 3 x 120° = 360°. Toate acestea sunt cuprinse în următorul tabel, care evidențiază existența doar a cinci corpuri regulate.

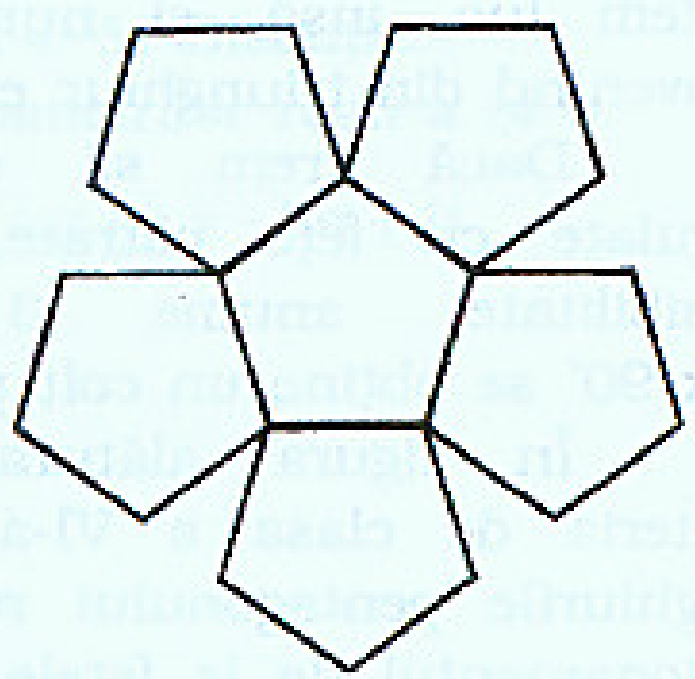
	Triunghi echilateral	Pătrat	Pentagon regulat	Hexagon regulat
3 fețe	3x60°=180° Tetraedru	3x90°=270° Cub	3x108°=324° Dodecaedru	3x120°=360° Colț plan
4 fețe	4x60°=240° Octaedru	4x90°=360° Colț plan	4x108°=432° Suprapunere	
5 fețe	5x60°=300° Icosaedru			
6 fețe	6x60°=360° Colț plan			



Icosaedrul Octaedrul Tetraedrul Hexaedrul Dodecaedrul

IV. DODECAEDRUL

Cunoscut și sub denumirea completă de pentagon-dodecaedru, acesta este cel mai frumos poliedru, fiind pe bună dreptate considerat nestematul cel mai de preț din coroana celor cinci corpuri platonice. Veți fi de acord cu aceasta cel mai târziu atunci când veți reuși să construiți cu exactitate primul dodecaedru. Acesta are 12 fețe pentagoane regulate (în limba greacă: dodeca = doisprezece). Cea mai bună variantă pentru construirea sa din carton este asamblarea separată a celor două „semisfere" ale sale, compuse din câte șase pentagoane regulate:

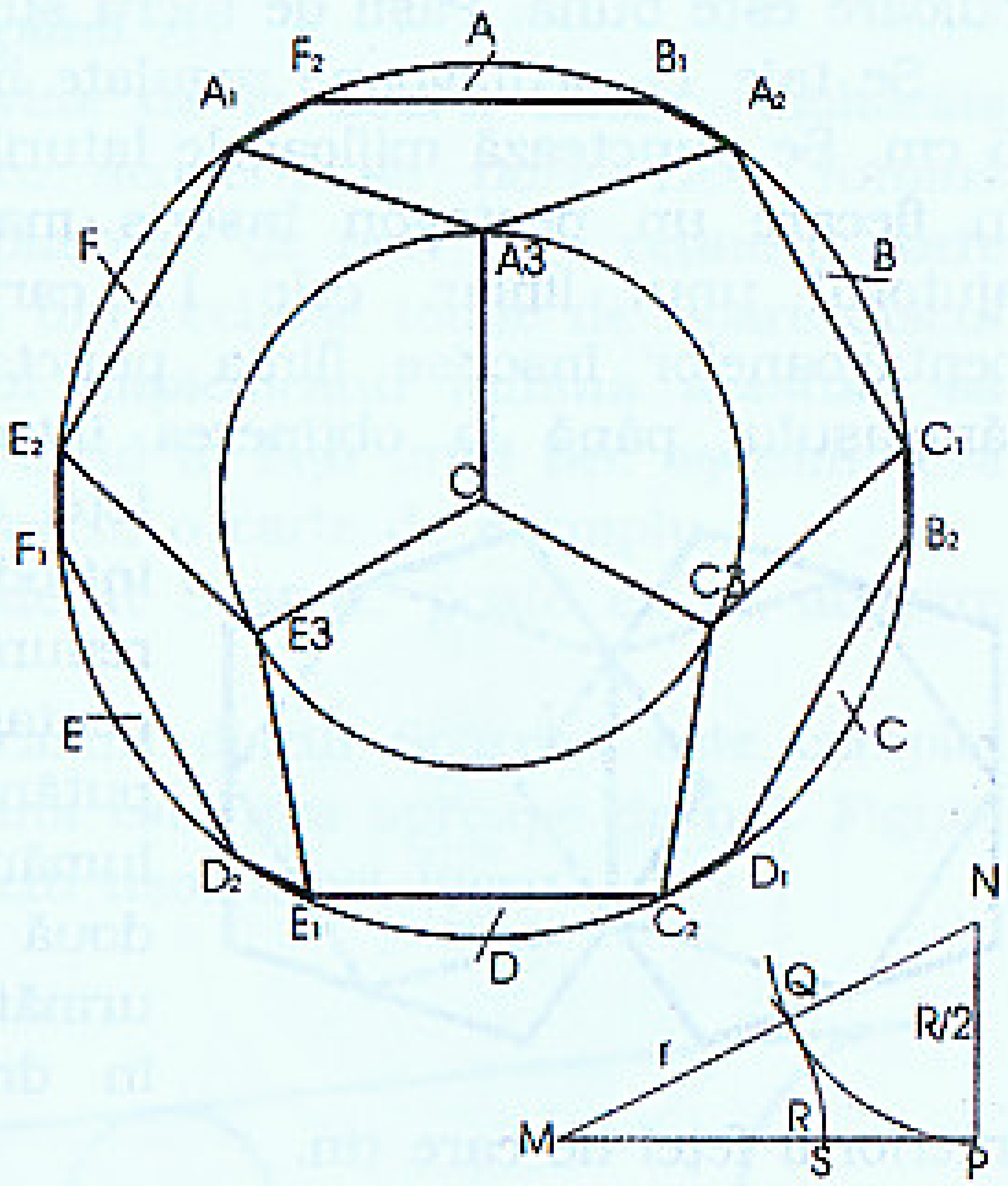


Din multitudinea cunoștințelor legate de acest minunat corp, vă vom prezenta două aspecte inedite:

a) DESENAREA DODECAEDRULUI

Aceasta este destul de dificilă, dar satisfacția trăită la finalizarea desenului compensează tot efortul depus. Începând din clasa a VII-a, elevii simt o mare bucurie în mânuirea riglei și a compasului pentru crearea unor desene geometrice cât mai complicate, aceasta reprezentând o contragreutate eficientă pentru problemele bazate doar pe judecată, întâlnite în fiecare oră de geometrie.

Pentru desenarea dodecaedrului trebuie parcurși următorii pași:



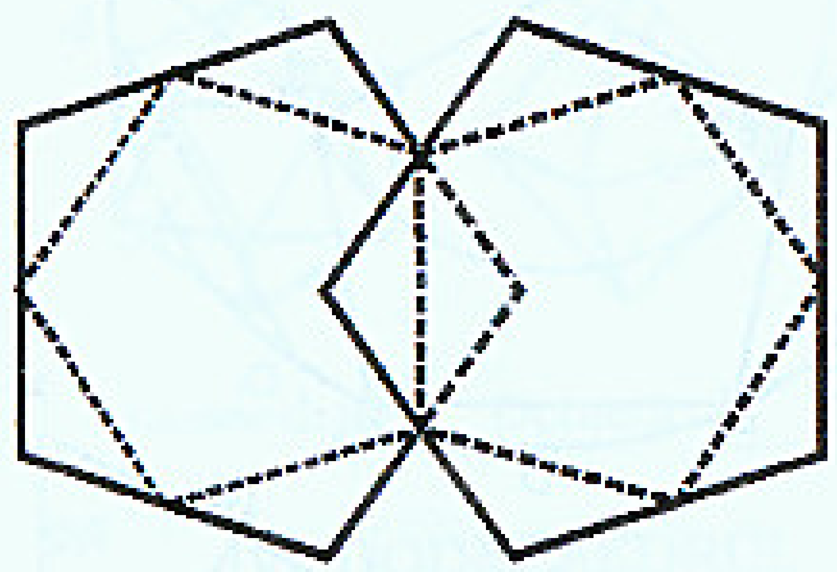
1) desenăm cercul $\mathscr{C}_1$ de centru O și rază R și pe acesta șase puncte echidistante A,B,C,D,E,F ca la hexagon;
2) trasăm secțiunea de aur pentru raza R, obținând raza r. Pentru aceasta procedăm astfel: desenăm separat triunghiul dreptunghic MNP cu catetele MP=R și MN=R/2. Cu piciorul compasului în N și cu raza R/2, trasăm un cerc ce va intersecta ipotenuza în Q. MQ este raza r iar punctul S reprezintă secțiunea de aur a razei R.
3) construim cercul $\mathscr{C}_2$ de rază r și centru O. Tot cu raza r, dar cu piciorul compasului în A, trasăm punctele A_1 și A_2 pe cercul $\mathscr{C}_1$. Analog procedăm și cu punctele B, C, D, E, F, obținând încă 12 puncte pe cercul $\mathscr{C}_1$.
4) ducem segmentul $[OA_3]$ astfel încât punctele O, A_3 și A să fie coliniare și $A_3 \in \mathscr{C}_2$. Procedăm la fel și cu segmentele $[OC_3]$ și $[OE_3]$.
5) construim pentagoanele $A_1A_3A_2B_1F_2$; $C_1C_3C_2D_1B_2$ și $E_1E_3E_2F_1D_2$. În final unim punctele A_2C_1; C_2E_1 și E_2A_1.

b) LĂMPAŞ DODECAEDRU CU STELUŢE

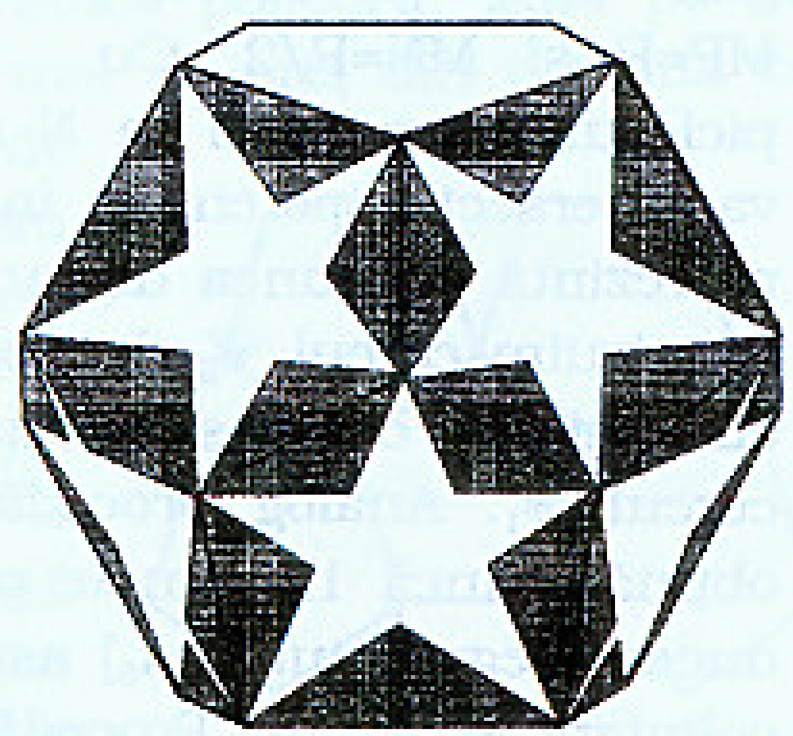
Lămpaşul prezentat în continuare reprezintă un ornament de Crăciun ce stârneşte multă bucurie în sufletele tuturor, fiind o aplicaţie extraordinară a unei noţiuni matematice în practică!

Dodecaedrul se confecţionează din carton iar în interiorul său se pune o lumânare. Cartonul trebuie să ofere o transparenţă destul de bună: pus în faţa unui bec, cu un obiect în spatele cartonului, trebuie să se vadă clar umbra obiectului. Culoarea ideală ar fi un galben cald (galben auriu), dar practic orice culoare este bună. Paşii de lucru sunt următorii:

Se taie 11 pentagoane regulate înscrise în cercuri cu raza de 6 cm. Se punctează mijloacele laturilor şi se unesc, obţinându-se în fiecare un pentagon înscris mai mic. Apoi se îndoaie, cu ajutorul unui liniar, cele 11 cartoane de-a lungul laturilor pentagoanelor înscrise (linia punctată). Urmează lipirea feţelor lămpaşului până la obţinerea întregului dodecaedru, în afara feţei de sus rămasă liberă pentru introducerea lumânării. Se poate renunţa şi la bază, rămânând 10 pentagoane, abajurul obţinut putând fi pus uşor peste lumânarea deja aprinsă. Lipirea a două feţe se face ca în figura următoare. Triunghiurile rămase în dreptul bazelor se lipesc în interiorul feţei de care ţin.



Introducând o lumânare în lămpaş, se vede pe fiecare faţă o stea luminoasă în cinci colţuri (pentagrama), limitată fiind de porţiunile cu strat dublu de carton. Recomandăm folosirea lumânărilor în vas de plastic sau aluminiu. Utilizarea acestor lămpaşe trebuie făcută cu mare atenţie, deoarece pot lua foarte uşor foc.



Mărit suficient la scară, se obţine un deosebit abajur, care poate fi folosit în siguranţă cu un bec destul de slab (25-40W).

Despre eclipsa de Soare din 11 August 1999

Cristina Blaga
Observatorul astronomic Cluj-Napoca

Profesorul: Vom vorbi astăzi despre un fenomen astronomic ce a inspirat multă teamă în trecut. El a fost consemnat în cronicile timpului şi interpretat ca prevestitor de mari dezastre naturale şi sociale. Cronicarii spun că în plină zi s-a făcut noapte.

Elevii: Cum adică noapte în plină zi?

Profesorul: Lumina zilei provine de la Soare. Zilele mohorâte sunt zile în care cerul este acoperit de nori. Deci lumina Soarelui trebuie să străbată plafonul de nori care reţine o parte din lumina primită. În cursul unei eclipse totale de Soare discul Lunii trece prin faţa Soarelui împiedicând lumina acestuia să ajungă la noi. Este ca atunci când în faţa unui bec aşezăm ceva ce nu lasă lumina deloc să treacă, o carte de exemplu.

Elevii: Luna este mai mică decât Soarele, poate ea să acopere discul Soarelui?

Profesorul: Da, în anumite cazuri discul Soarelui este complet acoperit de Lună, deoarece Luna este mai aproape de noi. Figura următoare ne ajută să înţelegem uşor acest lucru.

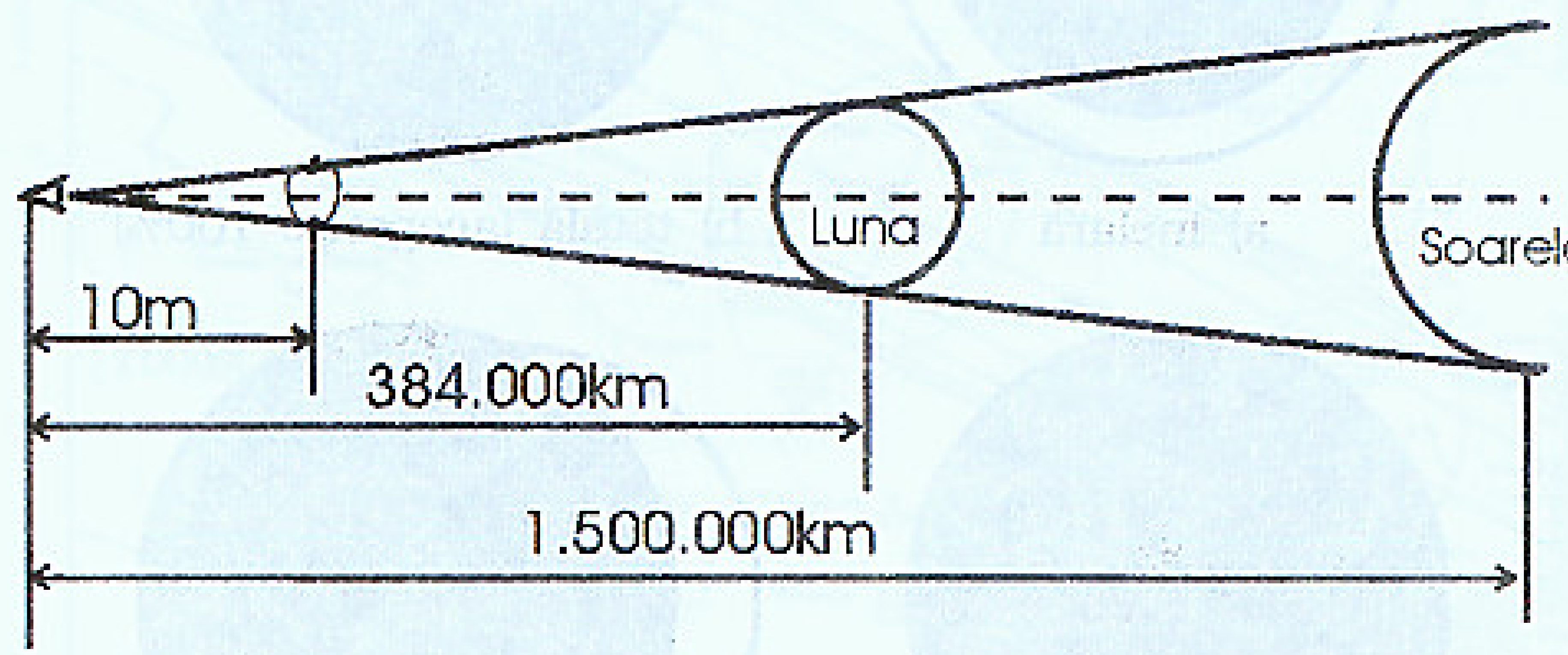


Fig.1. Diametrul aparent al Soarelui şi Lunii

Elevii: Ori de câte ori Soarele şi Luna sunt de aceeaşi parte a Pământului are loc o eclipsă de Soare?

Profesorul: Nu. Deşi datorită perioadelor mişcărilor de revoluţie a Lunii în jurul Pământului şi a Pămîntului în jurul Soarelui,