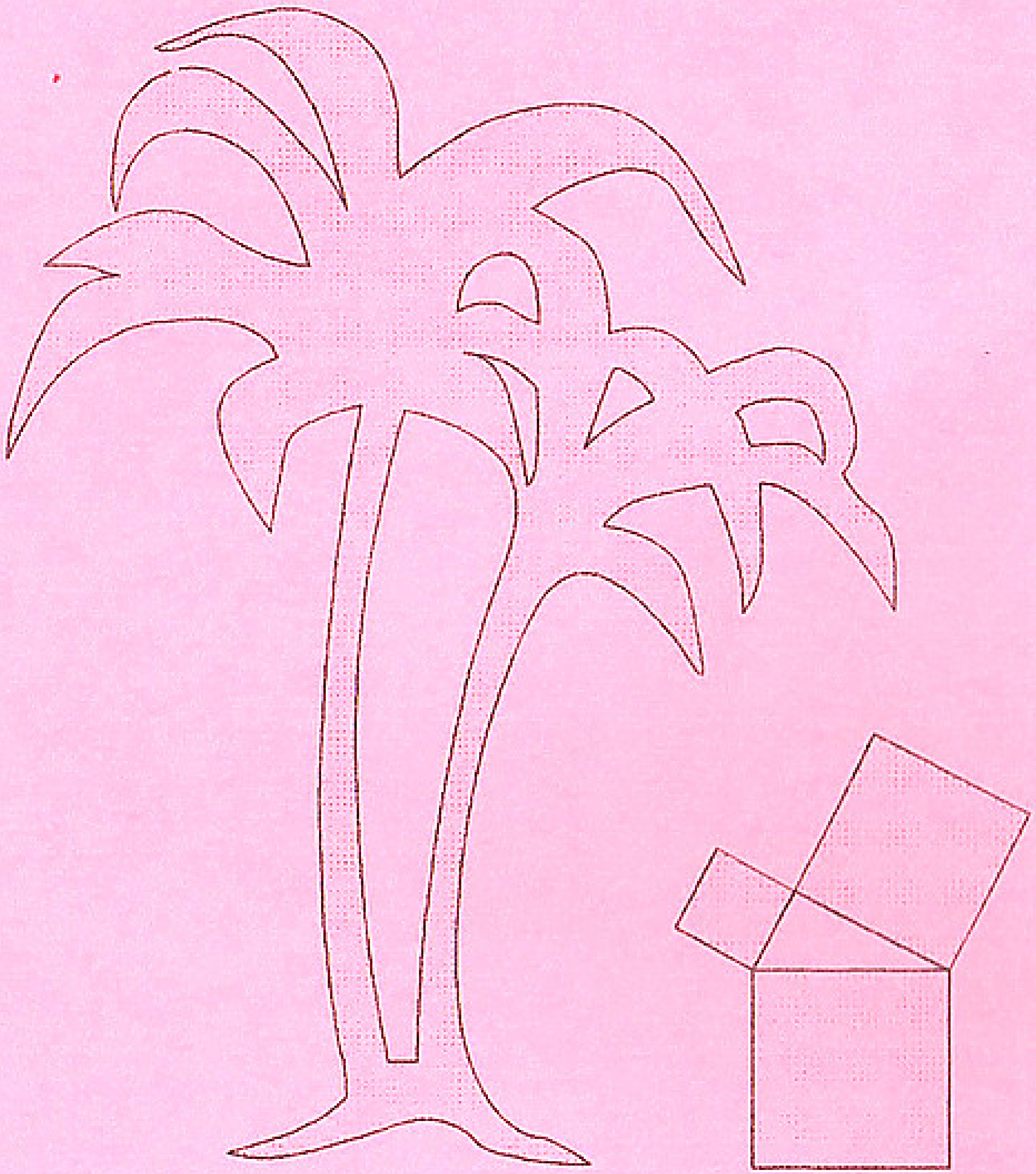
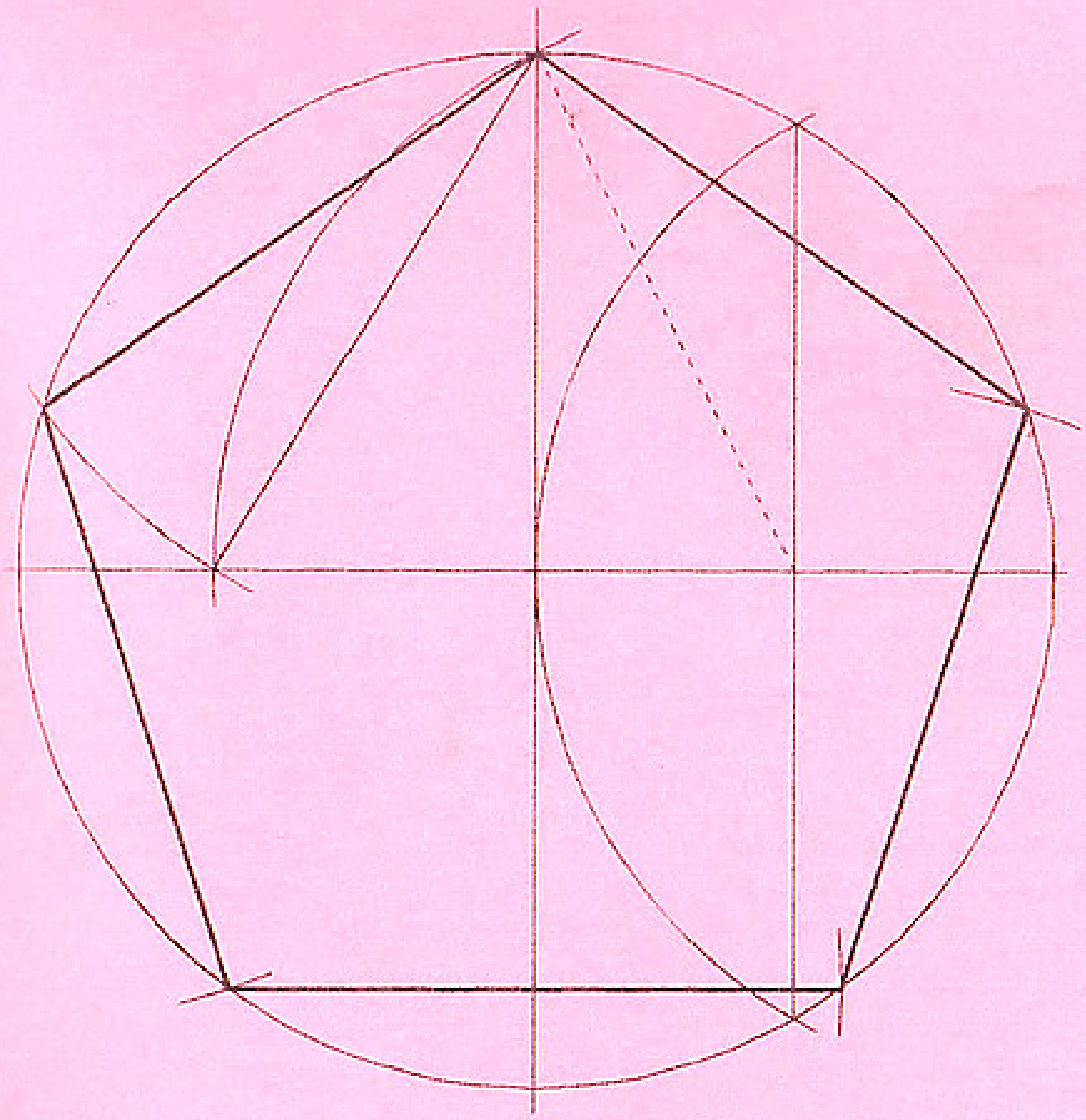


În caietul din septembrie:
- Numere pitagorice
- Desene pe pătrățele
- 101 ecuații cu parametrii
- Predarea geometriei în spațiu
- Pentagon-dodecaedrul

ISBN 973-96533-9-1
EDITURA TRIADE 1998

NUMĂRUL 2 - APRILIE 1998

P3NT4GON1A



CAIET TRIMESTRIAL
DE MATEMATICĂ

DESPRE RIGUROZITATEA DUSĂ LA EXTREM

Ce noroc pe noi, românii, să avem aşa copii deştepţi. Şi ei devin, de la an la an, tot mai capabili şi mai inteligenţi. Astfel, dacă în urmă cu 20 ani, elevii învăţau despre ecuaţii în clasa a VII-a, acum le studiază începând din ciclul primar. Iar probleme date la olimpiada republicană în anii 80, sunt depăşite, ca dificultate, de probleme date în prezent la examenele de admitére în licee.

Totuşi, ceva este "putred" în acest tablou de vis. Din cauza încărcării continue şi a teoretizării excesive, mulţi elevi au pierdut contactul cu matematica, părţi întregi de materie rămânând efectiv "de căruţă". În şcoala generală, cel mai vast domeniu aflat în această situaţie este demonstraţia geometrică. Limbajul tot mai greoi, obligat a îndeplini cerinţe de rigurozitate mult prea înalte, dar şi ambiţia profesorilor de a rezolva la ore probleme tot mai grele, pentru olimpiade, au dus la crearea unei prăpăstii între elevi şi geometrie. Puţinele probleme clasice şi accesibile rămase nu pot da elevilor o imagine completă, despre demonstraţiile geometrice, iar problemele "tari" reuşesc doar să-i deruteze şi să-i alunge. În schimb, lecţiile frumoase, cum ar fi pentagonul regulat sau octaedrul regulat, sunt demult şi pe nedrept uitate, doar pentru că nu pot oferi probleme deosebite pentru concursuri.

Dar nu numai problemele şi ordonarea materiei necorespunzătoare capacităţii şi vârstei elevilor lasă de dorit. Şi introducerea noţiunilor şi ordonarea lecţiilor după modelul universitar, gândite pentru persoane ce au cunoscut deja materia, dar aplicate elevilor care nu au nici o idee despre ce va fi vorba în lecţie, sunt contrare principiilor elementare de pedagogie. Iată două scurte exemple: în manualul de clasa a IX-a se vorbeşte cinci pagini despre numere complexe sub formă de perechi până a se introduce numărul i, iar la studiul ariilor din clasa a VII-a se porneşte prin definirea ariei triunghiului, în loc să se înceapă cu aria dreptunghiului ca fiind figura de bază ce se compune din pătrate (unitatea de măsură pentru arie).

Astfel, mulţi copii capabili sunt jertfiţi pe altarul acestei rigurozităţi greşit înţelese. Elevi, care ar înţelege şi ar învăţa matematica cu plăcere, nu fac faţă pentru că ştacheta este fixată mult prea sus.

Revenind la demonstraţia geometrică, ne punem, pe bună dreptate, întrebarea: cum s-ar putea ieşi din această criză, în condiţiile în care programa rămâne aceeaşi?
Sfârşitul clasei a VII-a este potrivit unei deşteptări în ceea ce priveşte geometria. Acum este momentul unei recapitulări, pentru care am pregătit un set de probleme corespunzătoare, dar şi zece demonstraţii deosebite ale teoremei lui Pitagora. Parcurse conştiincios, sub îndrumarea dascălului, acestea vor împrăştia ceaţa care înconjoară elevul în căutările sale de înţelegere a geometriei.

CUPRINS

Acest caiet a apărut cu sprijinul Fundaţiei "Ars Pedagogica" şi al imprimeriei PRINTEK, Cluj.

Comenzi, sugestii şi propuneri de probleme sau teme de abordat sunt aşteptate la adresa redacţiei: Titus Grigorovici, str. Fabricii, nr. 9, ap. 27, 3400 Cluj-Napoca, sau la Editura Triade CP 1-400, 3400 Cluj-Napoca.

10 DEMONSTRAŢII ALE TEOREMEI LUI PITAGORA

1)"Cum a descoperit Pitagora teorema sa"
Basm matematic de Guido Hauck (continuare)

Văzând cum a făcut Pitagora pace în triunghiul dreptunghic isoscel, vecinul acestuia, un triunghi dreptunghic oarecare, a luat imediat drumul spre Pitagora şi l-a rugat să-i confecţioneze şi lui şorţuri. Acesta se scărpină în cap şi spuse: "Hm, asta nu va merge la fel de uşor ca la celălalt triunghi. Dar să încercăm!"

Ajungând la tăbăcar, Pitagora a scos din rămăşiţele de piele existente 8 bucăţi triunghiulare cu forma şi mărimea exact ca ale triunghiului folosit ca şablon. Apoi, a încercat din nou să coasă împreună 4 din cele 8 triunghiuri şi să le dea forma unui pătrat. A obţinut astfel din nou un şorţ de formă pătrată, ca şi la triunghiul isoscel, numai că în mijlocul acestuia era o gaură. Ea avea forma unui pătrat cu latura egală cu diferenţa celor două catete (fig.1).

După aceea, din cele patru triunghiuri rămase a cusut, ca şi mai înainte, câte două de-a lungul ipotenuzelor. Ce a ieşit nu au fost desigur pătrate ca şi la triunghiul isoscel, ci doar două dreptunghiuri identice.

Pitagora nu-şi pierdu cumpătul, ci prinse cu latura mai mare unul dintre dreptunghiuri la brâul catetei mai mari, pe celălalt dreptunghi îl prinse cu latura mai îngustă pe brâul catetei mai mici şi spuse: "Un şorţ este prea scurt iar celălalt prea lung. Aici trebuie să mai echilibrăm puţin diferenţa". (fig. 1)

Tăie apoi o bucată din şorţul lung, astfel că mai rămase un pătrat de latură egală cu cateta mică.

Cusu apoi bucata tăiată de dreptunghiul care atârna pe cateta mare.

Astfel, latura mică a ajuns să aibă şi ea o lungime egală cu a catetei mari, iar şorţul să aibă forma aproape de a unui pătrat, cu excepţia unei porţiuni din colţ care a rămas goală. (fig. 2)

Când Pitagora se uită mai bine la forma golului spuse: "Acesta este fără îndoială un pătrat, cu latura egală cu diferenţa catetelor. Ea este, aşadar, la fel de mare ca şi gaura din interiorul şorţului ipotenuzei". A croit două bucăţi de piele de această formă şi le-a cusut în cele două găuri rămase, după care deveni tot mai îngândurat. Deodată sări în sus de bucurie şi strigă:

"Ura, uitaţi-vă aici! Pătratul ipotenuzei se compune din aceleaşi bucăţi ca şi cele două pătrate ale catetelor, şi anume patru triunghiuri dreptunghice şi un petec pătrat. Deci teorema este valabilă în general şi pentru triunghiuri dreptunghice cu catetele inegale: PĂTRATUL IPOTENUZEI ESTE EGAL CU SUMA PĂTRATELOR CATETELOR. Aceasta se cheamă teorema lui

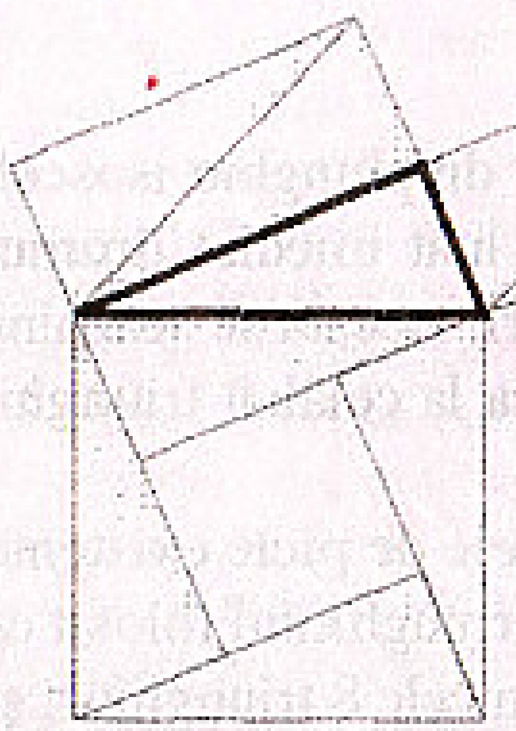


fig.1

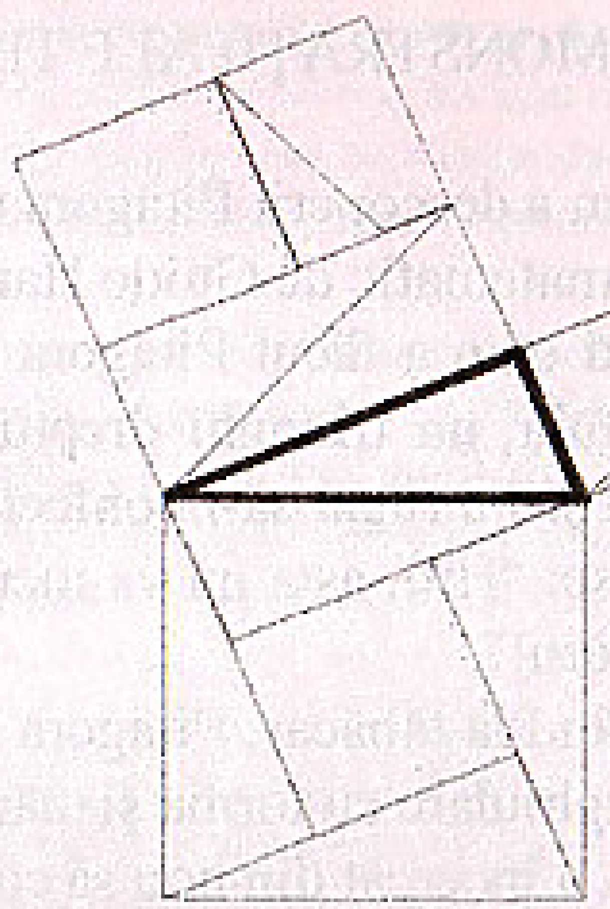


fig.2

Pitagora. Poţi fi mândru de acest fapt, triunghiule dreptunghic. Mergi acum iute acasă şi fă cunoscut aceasta şi tovarăşilor tăi!"

Plin de bucurie triunghiul se grăbi să se întoarcă acasă cu şorţurile sale noi şi vesti pe toate străzile din Trigonia noutatea. Aceasta făcu vâlvă mare şi peste tot se auzea răsunând: "Pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor". Fiecare triunghi vroia să verifice teorema pe el însuşi şi astfel veniră toate alergând la Pitagora să-l roage să le croiască şi lor şorţuri.

Acesta însă, le spuse: "Afacerea este cam încurcată. Cele câteva resturi de piele pe care tăbăcarul le mai avea în magazie s-au consumat şi el nu mai are altă marfă. Dar trebuie să fie o soluţie. Lăsaţi-mă să mă gândesc!"

După aceea, Pitagora a mers în ocolul vitelor şi şi-a ales o sută de boi graşi. Pe aceştia i-a sacrificat şi i-a jertfit zeilor, ca mulţumire pentru faptul că ei i-au inspirat frumoasa teoremă. Pieile însă, le-a dus la tăbăcar ca să le pregătească şi să confecţioneze prietenilor săi şorţurile dorite. Îi invită apoi pe toţi la sărbătoarea de jertfă. Până noaptea târziu au şezut împreună, triunghiurile glorificându-l pe Pitagora şi cântând:

"Pitagora ne-a dat teorema
Vitele-o ştiu pe propria piele.
Învaţ-o degrabă de teama
Să n-ajungi să fii printre ele!"

2) Următoarea demonstraţie este atribuită lui Pitagora, folosind teorema catetei demonstrată prin asemănările $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ respectiv $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.

Astfel avem $AB^2 = BD \cdot BC$ şi $AC^2 = DC \cdot BC$
$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC = BC \cdot (BD + DC) = BC \cdot BC = BC^2$

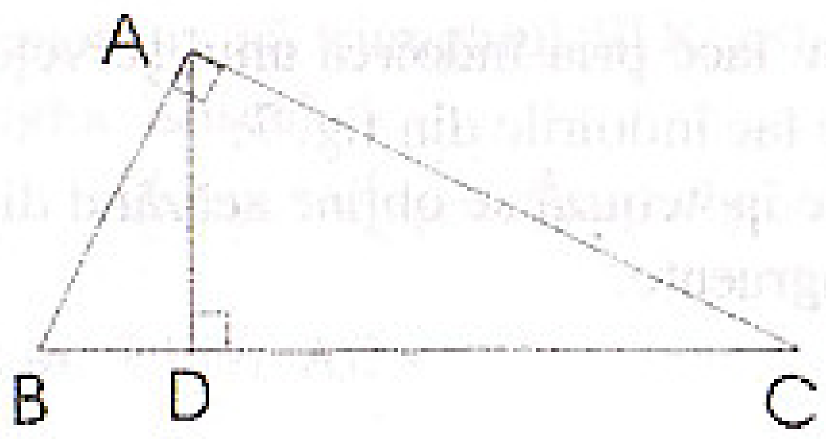


fig.3

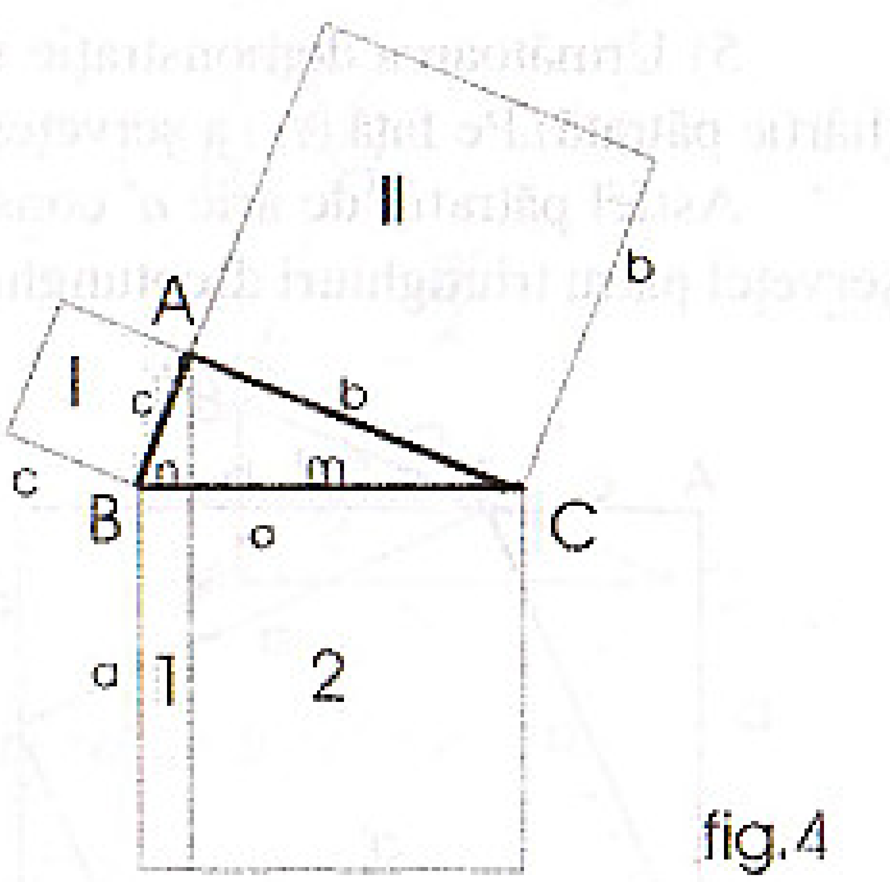


fig.4

Această demonstraţie poate fi evidenţiată grafic prin următoarele egalităţi de arii:
$c^2 = n \cdot a$ şi $b^2 = m \cdot a \Rightarrow \mathcal{A}_I = \mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_{II} = \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_I + \mathcal{A}_{II} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ deci $c^2 + b^2 = a^2$

3) În demonstraţia dată de Euclid, în ale sale ELEMENTE, echivalenţa de arii $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_1$ este demonstrată astfel:

$\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_{ABDE} = 2\mathcal{A}_{ABD} =$
$= 2\mathcal{A}_{CBD} = 2\mathcal{A}_{ABK} = 2\mathcal{A}_{HBK} =$
$= \mathcal{A}_{HBKI} = \mathcal{A}_1$

La fel se demonstrează $\mathcal{A}_{II} = \mathcal{A}_2$ de unde rezultă că $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Congruenţa $\Delta DBC \equiv \Delta ABK$ se demonstrează în problema 104 de la pagina 28.

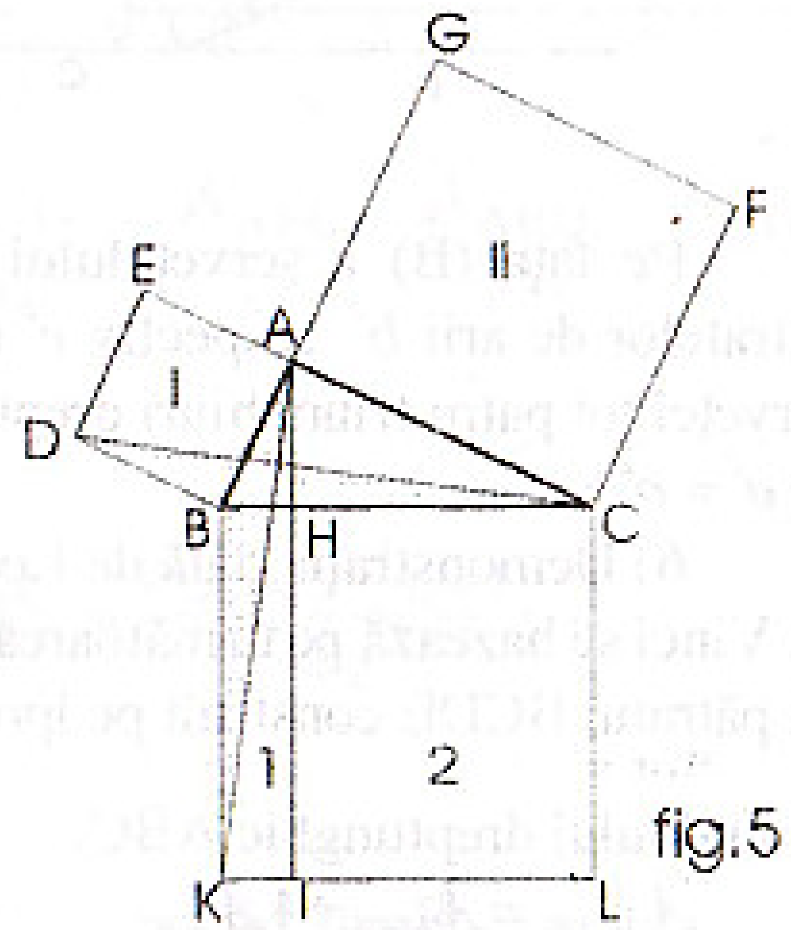


fig.5

4) O variantă a demonstraţiei 2) este următoarea:

$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{x}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot x$

$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a - x}{b} \Rightarrow b^2 = a^2 - a \cdot x$

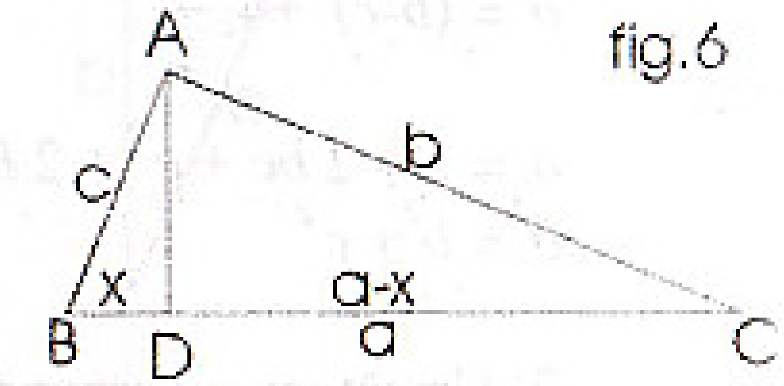


fig.6

Adunând ultimele relaţii obţinem $c^2 + b^2 = a \cdot x + a^2 - a \cdot x \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2$.

5) Următoarea demonstraţie se poate face prin îndoirea unui şerveţel (hârtie pătrată). Pe faţă (A) a şerveţelului se fac îndoirile din fig. 7.

Astfel pătratul de arie a^2 construit pe ipotenuză se obţine scăzând din şerveţel patru triunghiuri dreptunghice congruente.

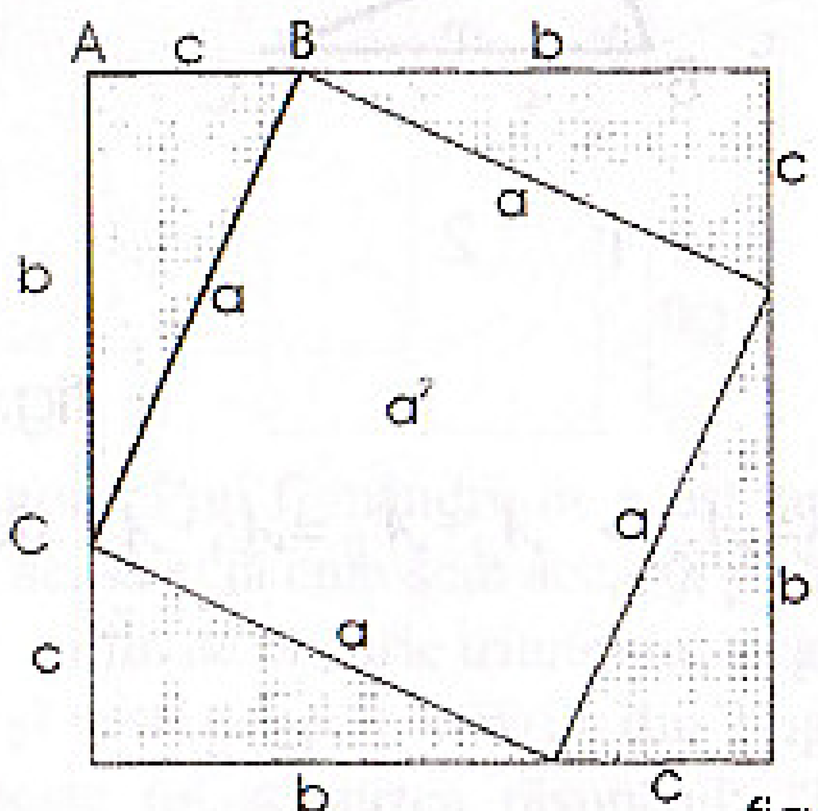


fig.7

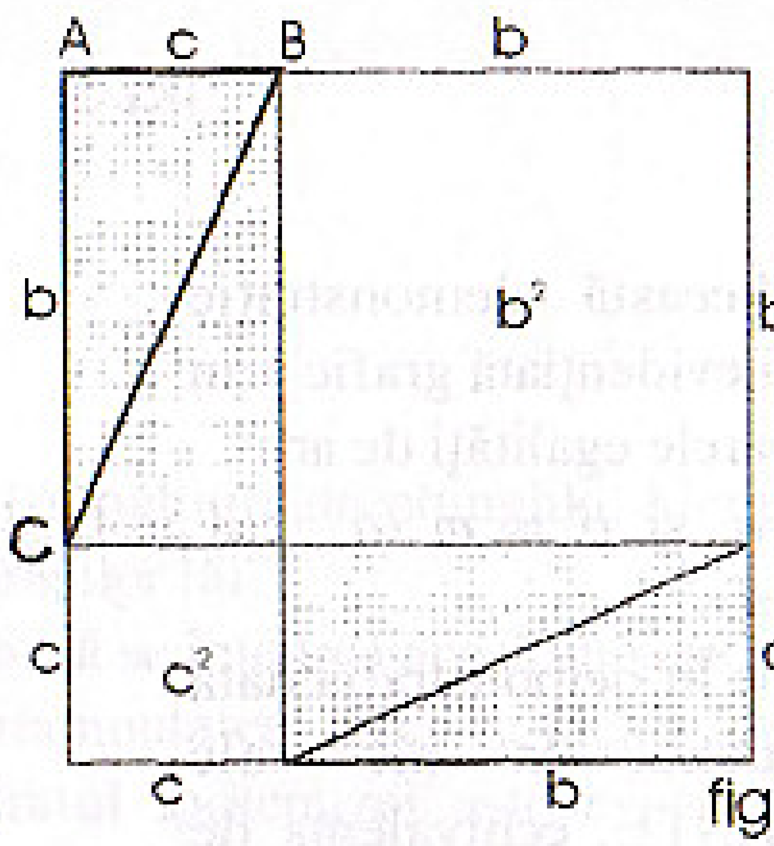


fig.8

Pe faţa (B) a şerveţelului se fac îndoirile din fig. 8. Astfel suma pătratelor de arii b^2 respectiv c^2 construite pe catete se obţine scăzând din şerveţel tot patru triunghiuri dreptunghice congruente. Din (A) şi (B) rezultă că $a^2 = b^2 + c^2$.

6) Demonstraţia dată de Leonardo da Vinci se bazează pe următoarea figură cu pătratul BCDE construit pe ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC.

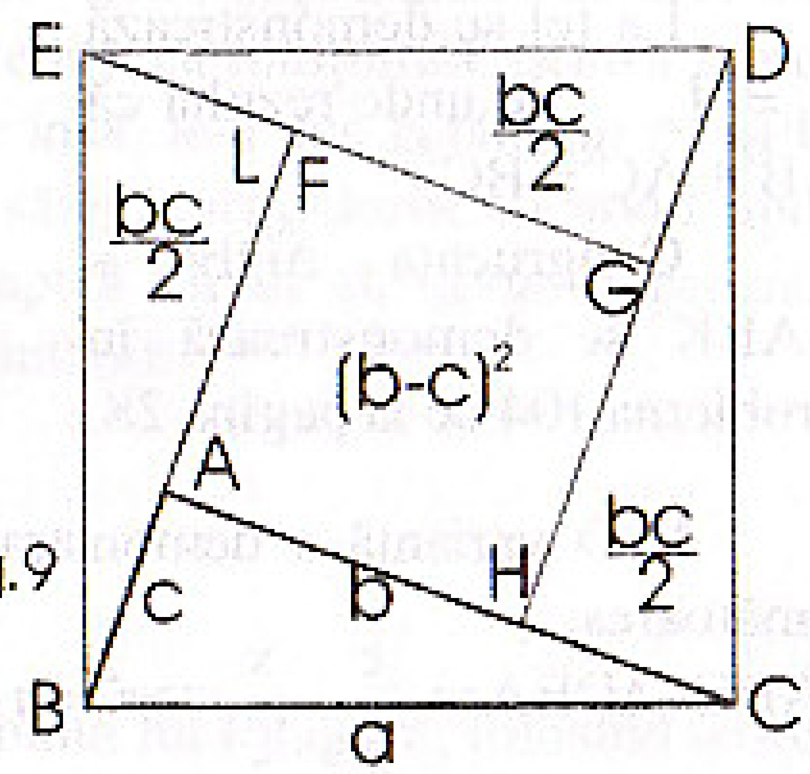


fig.9

$$\mathcal{A}_{BCDE} = \mathcal{A}_{AFGH} + 4\mathcal{A}_{ABC}$$

$$a^2 = (b-c)^2 + 4\frac{bc}{2}$$

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

7) Următoarea demonstraţie, dată de Abraham Garfield fost preşedinte al Statelor Unite, foloseşte descompunerea trapezului dreptunghic ACDE din figura 10.

Ştiind că $\Delta ABC \equiv \Delta EDB$ se poate demonstra că triunghiul BDC este dreptunghic isoscel.

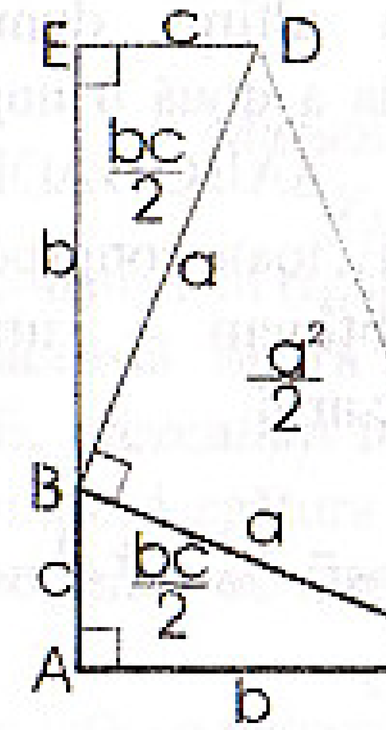


fig.10

$$\mathcal{A}_{ACDE} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{BED} + \mathcal{A}_{BCD}$$

$$\frac{1}{2}(AC + ED)\cdot AE =$$

$$\frac{1}{2}AC\cdot AB + \frac{1}{2}BE\cdot ED + \frac{1}{2}BC\cdot BD \;\Big|\; \cdot 2$$

$$(b+c)(b+c) = bc + bc + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

8) Folosind asemănarea triunghiurilor şi proporţiile derivate, obţinem următoarea demonstraţie:

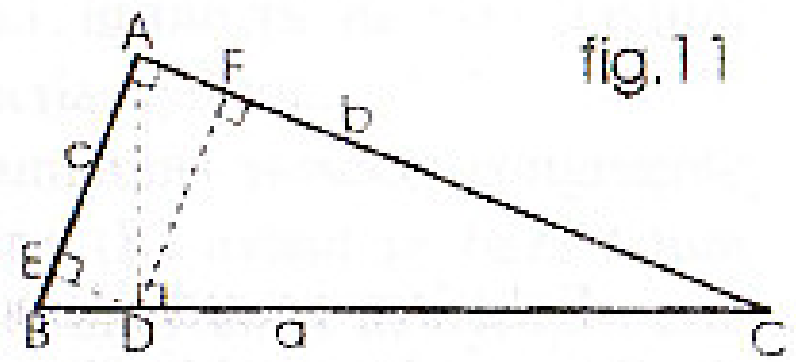


fig.11

$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{AD\cdot BC}{2BC^2} = \frac{DE\cdot AB}{2AB^2} = \frac{DF\cdot AC}{2AC^2} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{a^2} = \frac{\mathcal{A}_{ABD}}{c^2} = \frac{\mathcal{A}_{ADC}}{b^2}$$

Dar $\dfrac{\mathcal{A}_{ABD}}{c^2} = \dfrac{\mathcal{A}_{ADC}}{b^2} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ADC}}{c^2 + b^2}$

Din ultimele două relaţii se obţine că: $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{a^2} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ADC}}{c^2 + b^2}$

Numărătorii fiind egali obţinem că:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

9) O demonstraţie foarte simplă se obţine din figura alăturată astfel:

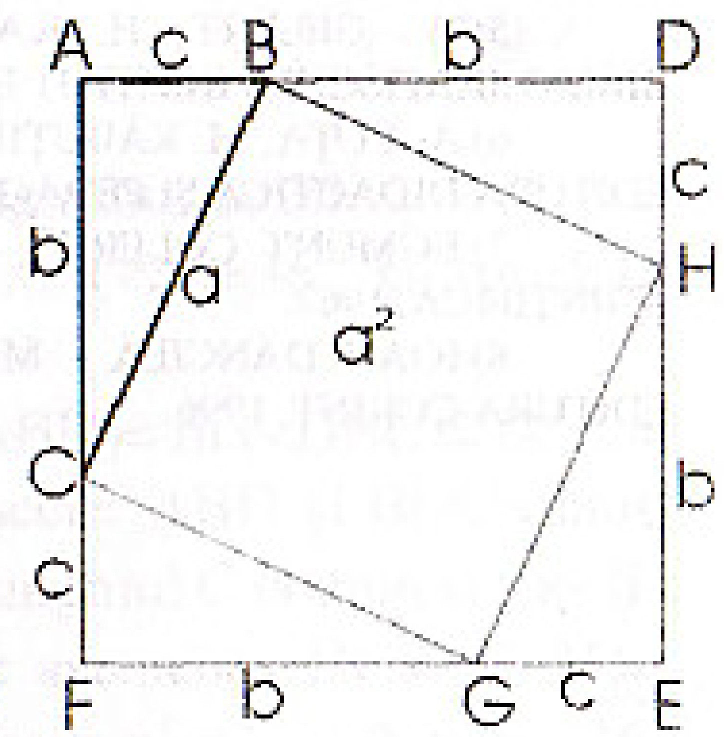


fig.12

$$\mathcal{A}_{BCGH} = \mathcal{A}_{ADEF} - 4\mathcal{A}_{ABC}$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4\frac{bc}{2}$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$$

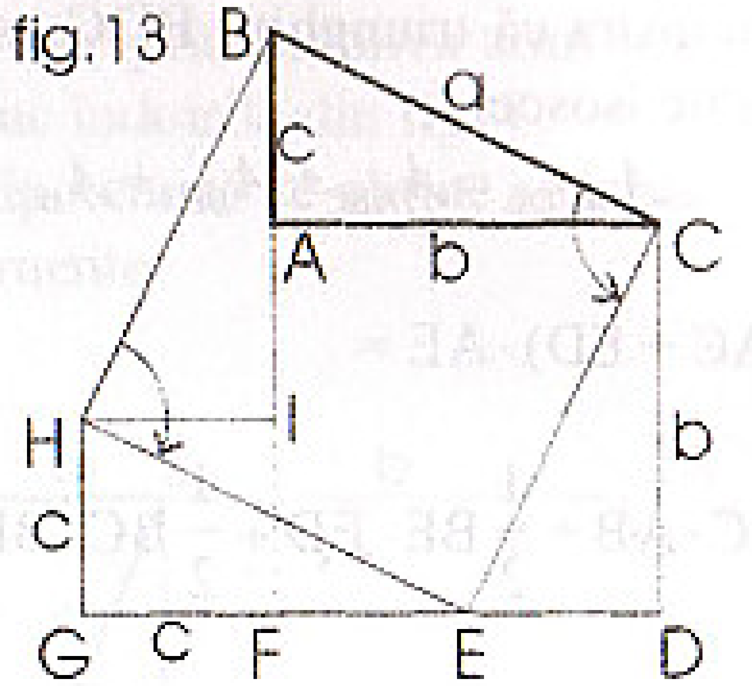
$$a^2 = b^2 + c^2$$

10) În ultima demonstrație folosim rotația a două triunghiuri, și anume $\Delta ABC \to \Delta DEC$ și $\Delta IHB \to \Delta GHE$, toate congruente. Astfel obținem următoarea echivalență de arii:

$$\mathcal{A}_{BCEH}=\mathcal{A}_{ACDGH}=\mathcal{A}_{ACDF}+\mathcal{A}_{FGHI}$$

deci $a^2=b^2+c^2$

fig.13



*

Folosirea acestor demonstrații în finalul clasei a VII-a poate oferi elevilor o vedere mai largă asupra marii varietăți de demonstrații folosite în geometrie, toate aplicate pe cea mai renumită teoremă a matematicii.

*

BIBLIOGRAFIE
1) ARNOLD BERNHARD - GEOMETRIE; EDITURA ARHETIP, 1995.
2) MIHU CERCHEZ - PITAGORA; EDITURA ACADEMIEI R.S.R. 1986.
3) MATHEMATIK - KLEINE ENZYKLOPADIE; VERLAG ENZYKLOPADIE LEIPZIG, 1968.
4) A. HOLLINGER - MATEMATICĂ CL. A-VII-A; EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, 1970.
5) W. GELERT, H. KASTNER, S. NEUBER - LEXIKON DER MATHEMATIK; BIBLIOGRAFISCHES INSTITUT LEIPZIG, 1979.
6) A. COȚA, M. RĂDUȚIU, M. RADO, F. VORNICESCU - MATEMATICĂ CL. A- IX-A; EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, 1989.
7) EGMONT COLERUS - DE LA TABLA ÎNMULȚIRII LA INTEGRALĂ; EDITURA ȘTIINȚIFICĂ, 1967.
8) IOAN DĂNCILĂ - MATEMATICA GIMNAZIULUI ÎNTRE PROFESOR ȘI ELEV; EDITURA CORINT, 1996.

PENTAGONUL REGULAT

Mariana Grigorovici
Zoltan Labancz

Poligonul regulat cu cinci laturi se poate construi cu rigla și compasul. Din multitudinea de date acumulate despre această figură de care s-au pasionat toți marii matematicieni ai antichității, prezentăm în articolul de față trei construcții; două dintre ele cu demonstrație. Legătura pentagonului și a pentagramei (steaua cu cinci colțuri) cu secțiunea de aur vor fi tratate într-un număr viitor al revistei.

În structura actuală a programei, lecția de față se potrivește în clasa a IX-a, dar poate fi studiată și la cercul de matematică din clasa a VII-a. Cele trei construcții pot fi însă efectuate fără demonstrație în gimnaziu.

Mai întâi să calculăm latura pentagonului, în funcție de raza cercului circumscris, pentru a putea "descoperi" construcția acestuia.

Acest poligon este format din cinci triunghiuri isoscele congruente formate cu ajutorul razelor cercului circumscris (R) având ca bază latura pentagonului (l_5). Măsura unghiului de la vârf al unui astfel de triunghi este de $360^\circ : 5=72^\circ$ iar la bază de câte $(180^\circ-72^\circ) : 2=54^\circ$. Din ΔAOM ($OM \perp AB$) deducem: $AM = R \sin 36^\circ$ sau $l_5=2R\sin 36^\circ$. (fig.1)

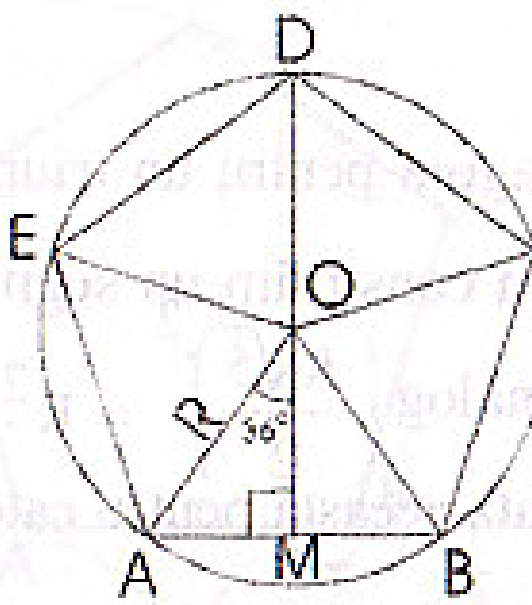


fig.1

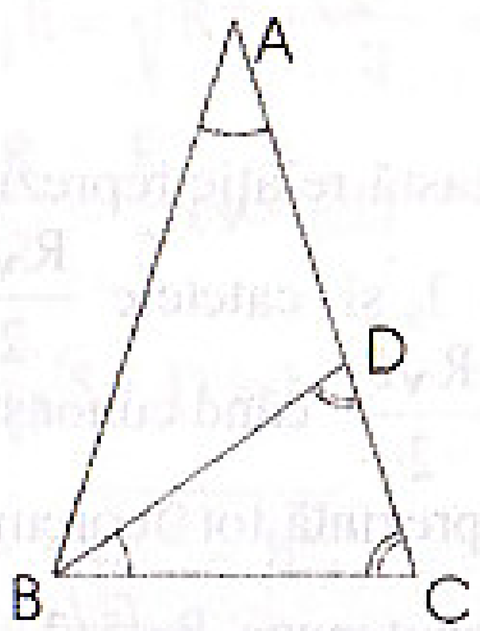


fig.2

Cum calculăm o funcție trigonometrică a unghiului de 36°?

Considerăm tringhiul isoscel ABC cu $m(\angle A)=36^\circ$ și $m(\angle B)= =m(\angle C)=72^\circ$, numit și triunghiul de aur. (fig.2)

Fie [BD bisectoarea $\angle B$, $D\in[AC] \Rightarrow m(\angle ABD)=m(\angle DBC)=72^\circ : 2= 36^\circ$. Astfel s-au format încă două triunghiuri isoscele: ABD și BDC dintre care al doilea asemenea cu triunghiul ABC având unghiul C comun și $m(\angle B) =m(\angle A)= 36^\circ$. Notăm $AD=BD=BC=x$; $AB=y$ de asemenea $DC=AC-AD= y-x$. Aplicând teorema cosinusului în ΔBDA obținem $x^2=x^2+y^2-2xy\cos\ 36^\circ$

sau 2 cos 36°=y/x. Din asemănarea Δ ABC şi Δ BDC obţinem rapoartele

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{DC} \text{ sau } \frac{y}{x}=\frac{x}{y-x}$$

Prelucrarea acestei propoziţii ne conduce la ecuaţia

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)-1=0 \text{ cu soluţia (pozitivă) } \frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Prin urmare $\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow \sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

şi $l_5=R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

Formula laturii pentagonului ar trebui să ne conducă şi la construcţia sa. Prelucrăm această relaţie încercând o interpretare geometrică a ei:

$$l_5^2=\frac{R^2}{4}\cdot 10-\frac{R^2}{4}\cdot 2\sqrt{5} \Rightarrow l_5^2=\left(\frac{5R^2}{4}-2\frac{R\sqrt{5}}{2}\frac{R}{2}+\frac{R^2}{4}\right)+\frac{4R^2}{4}$$

$$l_5^2=\left(\frac{R\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}\right)^2+R^2$$

Această relaţie reprezintă teorema lui Pitagora pentru un triunghi cu ipotenuza l_5 şi catetele $\frac{R\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}$ şi R. Cum construim un segment de lungime $\frac{R\sqrt{5}}{2}$ când cunoaştem R? Procedăm analog $\left(\frac{R\sqrt{5}}{2}\right)^2=R^2+\frac{R^2}{4}$ ceea ce reprezintă tot teorema lui Pitagora, de data aceasta pentru catetele R şi R/2 iar ipotenuza $R\sqrt{5}/2$.

De aici şi metoda lui Ptolemeu de construcţie a pentagonului. În figura 3,

$OB=R, OF=\frac{R}{2}; FB=FG=\frac{R\sqrt{5}}{2}, OG=FG-OF=\frac{R\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}$ şi $BG=l_5$

Metoda 1: Construim un cerc de rază OA şi centru O. Perpendicular pe diametrul AC ducem raza OB. Fie F mijlocul segmentului OA. Construim un arc de cerc de rază FB cu centrul în F care intersectează diametrul cercului în G. BG va fi lungimea laturii pentagonului regulat înscris în cercul dat.

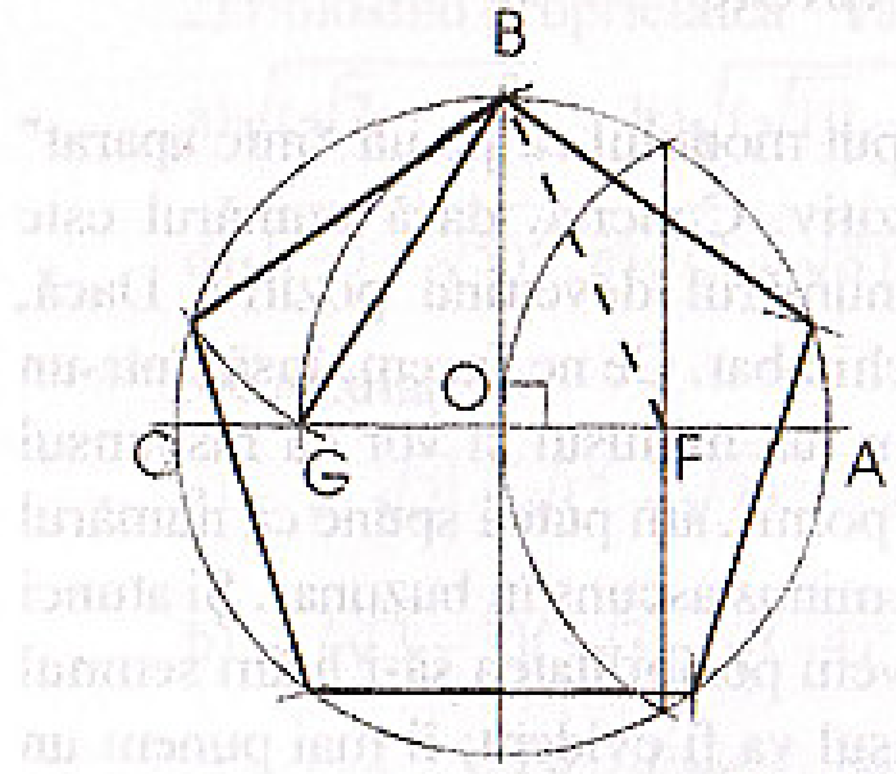


fig.3

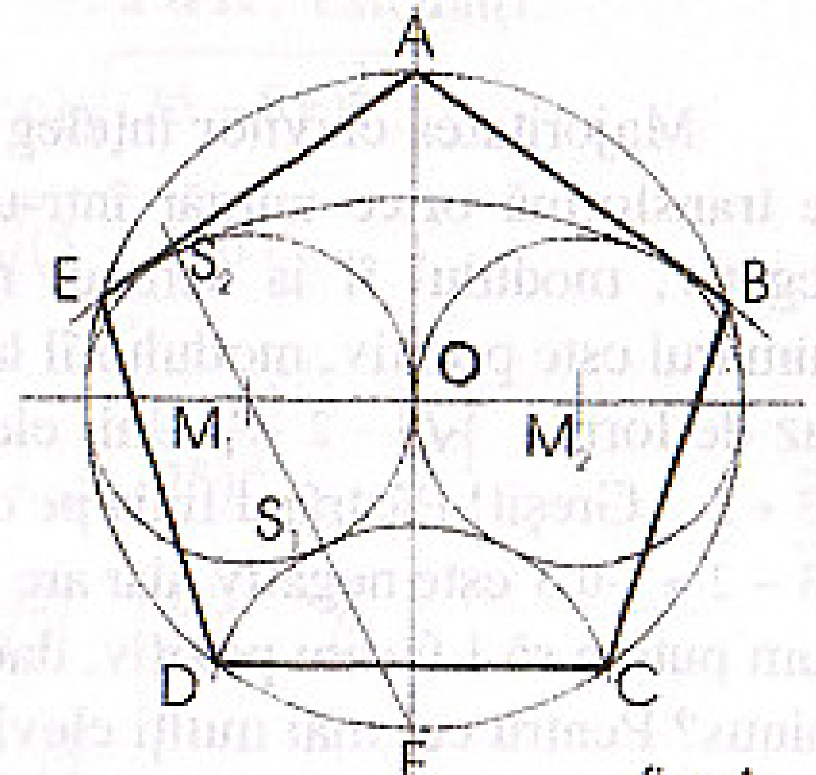


fig.4

Metoda 2: Această metodă este mai puţin cunoscută, dar are avantajul că vârfurile pentagonului se găsesc simultan. Pe un diametru orizontal al cercului mare construim două cercuri cu diametrul cât raza cercului mare. Prin centrul M_1 ducem secanta FM_1, AF fiind diametrul perpendicular pe M_1M_2. FM_1 intersectează cercul mic în S_1 şi S_2. Construim arcele de cerc de centru F şi rază FS_1 respectiv FS_2. Aceste arce intersectează cercul mare în D, C respectiv B, E care împreună cu A vor fi vârfurile pentagonului regulat. Demonstraţie:

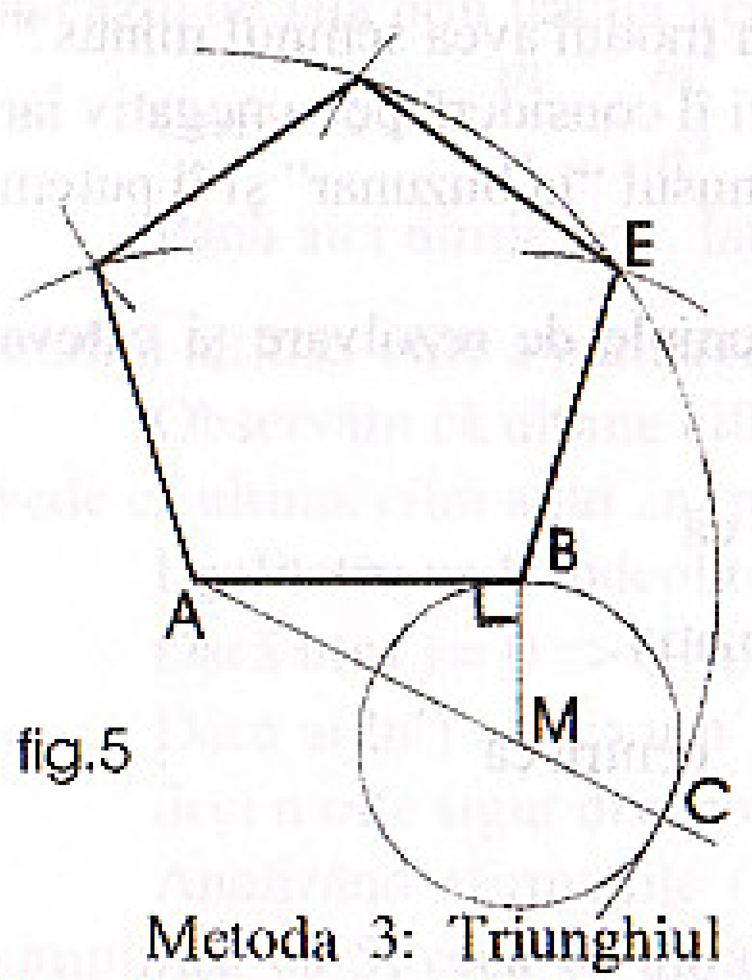


fig.5

În ΔM_1FO, $M_1F=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}}=\frac{R}{2}\sqrt{5}$

$FS_2=\frac{R}{2}\sqrt{5}+\frac{R}{2}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$

$FE=FS_2=\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)=b$

În ΔFEA, $EA=\sqrt{4R^2-b^2}=$

$\sqrt{4R^2-\frac{R^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2}=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=l_5$

Metoda 3: Triunghiul ABM este dreptunghic în B şi BM=AB/2. Cercul de centru M şi rază MB intersectează dreapta AM în C (fig. 5). Construim arcul de cerc de rază AC şi centrul A, luăm apoi AB în deschizătura compasului şi construim un arc de cerc cu centrul în B, care va intersecta arcul mare în E. Acesta va fi al treilea vârf al pentagonului. Pentru aflarea celui de-al patrulea vârf construim un nou arc de cerc de aceeaşi rază şi centru E, etc.

MODULUL PE ÎNŢELESUL TUTUROR

Majoritatea elevilor înţeleg la început modulul ca pe un "mic aparat" ce transformă orice număr într-unul pozitiv. Concret, dacă numărul este negativ, modulul îi ia semnul minus, numărul devenind pozitiv. Dacă, numărul este pozitiv, modulul îl lasă neschimbat. Ce ne facem, însă, într-un caz de forma $|\sqrt{3}-2|$? Unii elevi îi vor lua minusul şi vor da răspunsul $\sqrt{3}+2$. Greşit! Păstrând linia pe care am pornit, am putea spune că numărul $\sqrt{3}-2 \approx -0,3$ este negativ, dar are semnul minus ascuns în buzunar. Şi atunci cum putem să-l facem pozitiv, dacă nu avem posibilitatea să-i luăm semnul minus? Pentru cei mai mulţi elevi răspunsul va fi evident: îi mai punem un minus pentru că $(-) \times (-) = (+)$! Astfel, avem:

$$|\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2 = 2-\sqrt{3} \approx 2-1,7 = 0,3$$

Dacă numărul din modul este pozitiv, nu-i punem minus:

$$3-\sqrt{5} = \sqrt{9}-\sqrt{5} > 0 \Rightarrow |3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$$

În acest moment elevii vor înţelege şi următoarea contradicţie (aparentă) din definiţia modulului:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dacă} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{dacă} \quad a < 0 \end{cases}$$

"Cum adică $|a| = -a$? Păi cum poate un modul avea semnul minus?" Confuzia apare din cauză că cei mai mulţi elevi îl consideră pe -a negativ iar pe a pozitiv. De fapt, dacă $a < 0$, acesta are minusul "în buzunar" şi îl putem "pozitiviza" doar "dăruindu-i" încă un minus.

Prezentăm în continuare încă două exemple de rezolvare şi câteva exerciţii pe această temă:

a) $|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}| = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ pentru că $3\sqrt{2}-2\sqrt{3} = \sqrt{18}-\sqrt{12}$ este pozitiv.

b) $|3-\pi| = -(3-\pi) = -3+\pi = \pi-3$ pentru că $3-\pi \approx 3-3,14 = -0,14 < 0$.

1) Găsiţi următoarele valori absolute:

a)$|2,(3)|$; b)$|-\sqrt{2}|$; c)$|\sqrt{2}-1|$; d)$|\sqrt{5}-3|$; e)$|\pi-3|$; f)$|1-\sqrt{2}|$;

g)$|\sqrt{7}-\pi|$; h)$|2+\sqrt{7}|$; i)$|-\sqrt{3}-\sqrt{6}|$; j)$|\sqrt{10}-\pi|$; k)$|5-2\sqrt{6}|$;

l)$|\pi-3,14|$; m)$|1,41-\sqrt{2}|$.

2) Folosind proprietatea $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$, calculaţi:

a)$\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$; b)$\sqrt{(\sqrt{10}-2)^2}$; c)$\sqrt{(25-8\pi)^2}$;

d)$\sqrt{(-5-\sqrt{5})^2}$; e)$\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$; f)$\sqrt{(5-\sqrt{26})^2}$.

3)Calculaţi:

a) $|-\sqrt{2}| + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} + |4-\sqrt{7}| + \sqrt{(-25)^2}$

b) $(\sqrt{3}-2)(3\sqrt{3}-\sqrt{(-4)^2}+|1-\sqrt{3}|+|\sqrt{27}-7|)$

c) $|\sqrt{2}-1,41| + |1,73-\sqrt{3}| - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

d) $\pi - (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + |\pi - (\sqrt{2}+\sqrt{3})|$.

IRAŢIONALITATEA LUI $\sqrt{2}$

Demonstraţia clasică pentru iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$ foloseşte metoda reducerii la absurd, presupunând că $\sqrt{2}$ este un număr raţional, reprezentat în cazul de faţă prin fracţia ireductibilă m / n ; $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$

Până aici nimic nou. Iată însă, o continuare a demonstraţiei bazată pe studiul ultimei cifre a numerelor naturale m^2 şi $2n^2$.

Observăm că ultima cifră a lui m^2 poate fi 0; 1; 4; 5; 6 sau 9. La fel se vede că ultima cifră a lui $2n^2$ poate fi 0; 2 sau 8.

Egalitatea va fi îndeplinită doar dacă ultima cifră este 0.

Dacă $u(m^2) = 0 \Rightarrow u(m) = 0 \Rightarrow m \vdots 10 \Rightarrow m \vdots 2$ şi $m \vdots 5$ (1)

Dacă $u(2n^2) = 0 \Rightarrow u(n^2) = 0$ sau $5 \Rightarrow u(n) = 0$ sau 5
deci n este sigur divizibil cu 5 (2)

Analizând afirmaţiile (1) şi (2) observăm că fracţia m / n se poate simplifica cu 5, ceea ce intră în contradicţie cu ireductibilitatea presupusă iniţial. Din această contradicţie putem trage concluzia că $\sqrt{2}$ nu este un număr raţional. (q. e. d)

ADAPTARE DIN: HERMAN ATHEN; HEINZ GRIESEL - MATHEMATIK HEUTE 9 (MANUAL PENTRU CLASA A 9-A); SCHROEDEL - SCHÖNINGH VERLAG, 1981, HANNOVER

CORPURILE PLATONICE

Cunoscute şi sub denumirile de poliedre regulate sau corpuri cosmice, acestea au fost descrise pentru întâia oară de filozoful antic grec Platon (427? - 347? î.Ch.). Ele sunt în număr de cinci, şi anume: tetraedrul (regulat), cubul, octaedrul, icosaedrul şi pentagon - dodecaedrul; toate au feţele poligoane regulate congruente, iar unghiurile diedre dintre oricare două feţe alăturate sunt congruente.

Pornind din acest număr, vom analiza pe rând cele trei corpuri platonice "neglijate" în învăţământul românesc, şi anume octaedrul (opt feţe), dodecaedrul (12 feţe) şi icosaedrul (20 feţe), prezentându-le într-un mod cât mai accesibil şi atrăgător tuturor elevilor. Precizăm că oricare dintre acestea poate fi construit din carton de către un elev interesat. Chiar "desenarea" desfăşurărilor acestor corpuri reprezintă un exerciţiu bun pentru antrenarea vederii în spaţiu, iar satisfacţia trăită în final este deosebită. Aşadar puneţi mâna pe foarfecă, lipici, carton şi daţi-i drumul!

I. OCTAEDRUL

Acesta are opt feţe triunghiuri echilaterale şi poate fi descompus în două piramide cu baza comună, un pătrat. De fapt, toate secţiunile diagonale ABCD, AECF şi BEDF sunt pătrate cu acelaşi centru. Notând lungimea muchiei cu a se pot uşor demonstra (chiar în clasa a VIII-a) formulele pentru diagonala, aria şi volumul octaedrului:

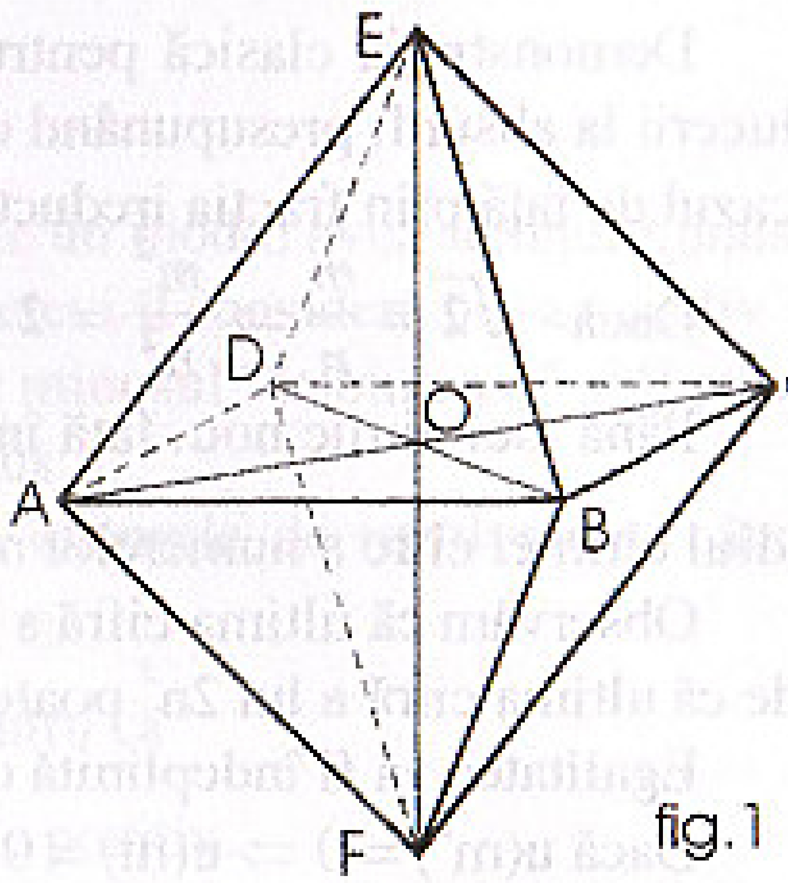


fig.1

$d = a\sqrt{2}$, $\mathcal{A} = 2a^2\sqrt{3}$ şi $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Pe lângă proprietăţile şi formulele enunţate mai sus se pot demonstra şi următoarele: $m(\angle AE, BF) = 60^\circ$; $m(\angle EB, (ABCD)) = 45^\circ$ sau $(ADE) \parallel (BCF)$.

II. TETRAEDRUL, CUBUL ŞI OCTAEDRUL ÎNSCRISE UNUL ÎN CELĂLALT

Aceste trei corpuri platonice se pot înscrie fiecare în celelalte două. Cea mai cunoscută dintre cele şase înscrieri este prima:

1. Centrele feţelor unui cub sunt vârfurile unui octaedru (fig. 2).
2. Centrele feţelor unui octaedru sunt vârfurile unui cub .

3. Mijloacele muchiilor unui tetraedru regulat sunt vârfurile unui octaedru regulat (fig. 3).
4. Centrele a patru feţe nealăturate ale unui octaedru sunt vârfurile unui tetraedru regulat (fig. 4).
5. Vârfurile A, C, B' şi D' ale cubului ABCDA'B'C'D' sunt vârfurile unui tetraedru regulat (fig. 5).
6. Centrele feţelor şi mijloacele înălţimilor unui tetraedru regulat sunt vârfurile unui cub.

Dintre toate aceste înscrieri, singura accesibilă clasei a VIII-a este înscrierea tetraedrului în cub (5). Celelalte merită studiate doar în clasa a X-a sau la cercurile de matematică.

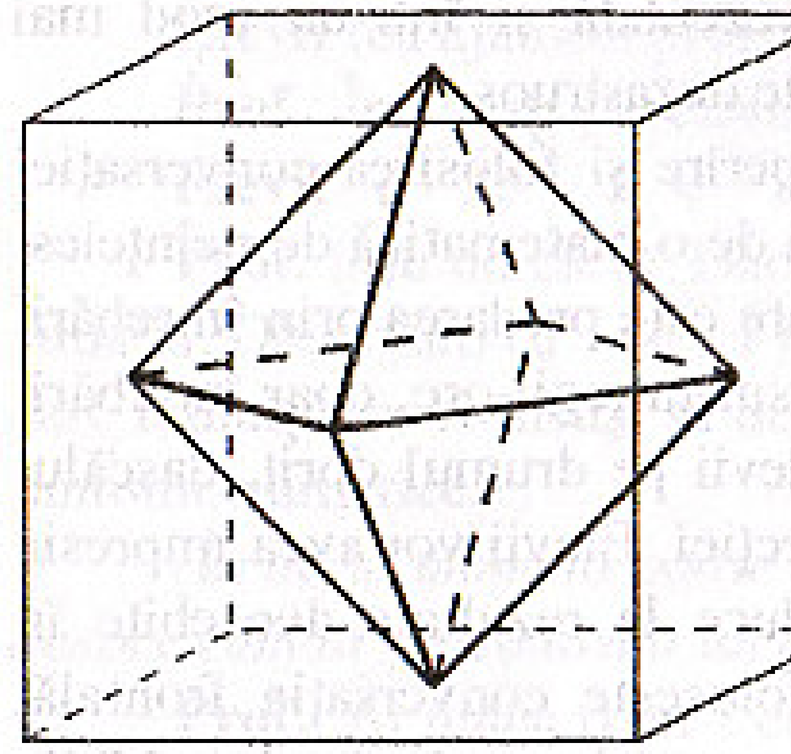


fig.2

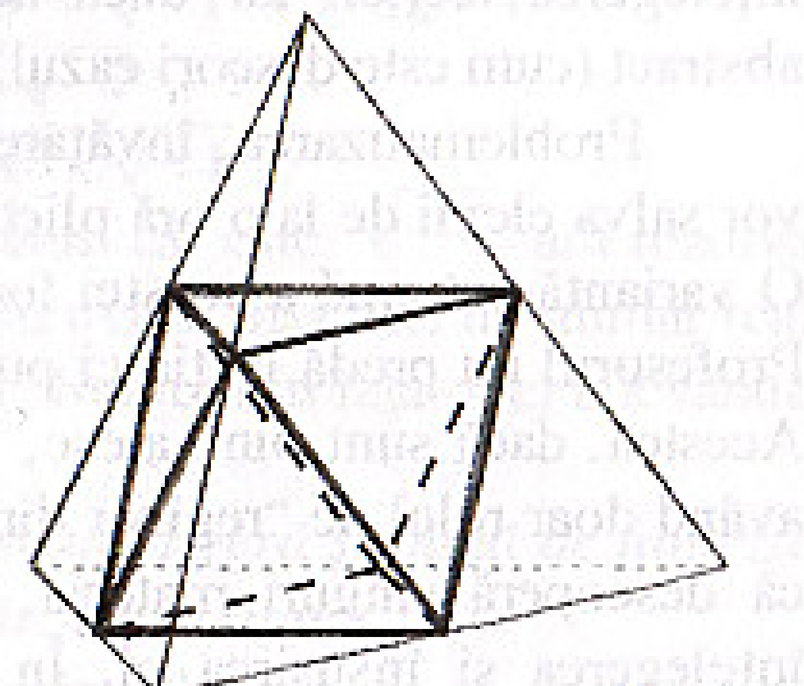


fig.3

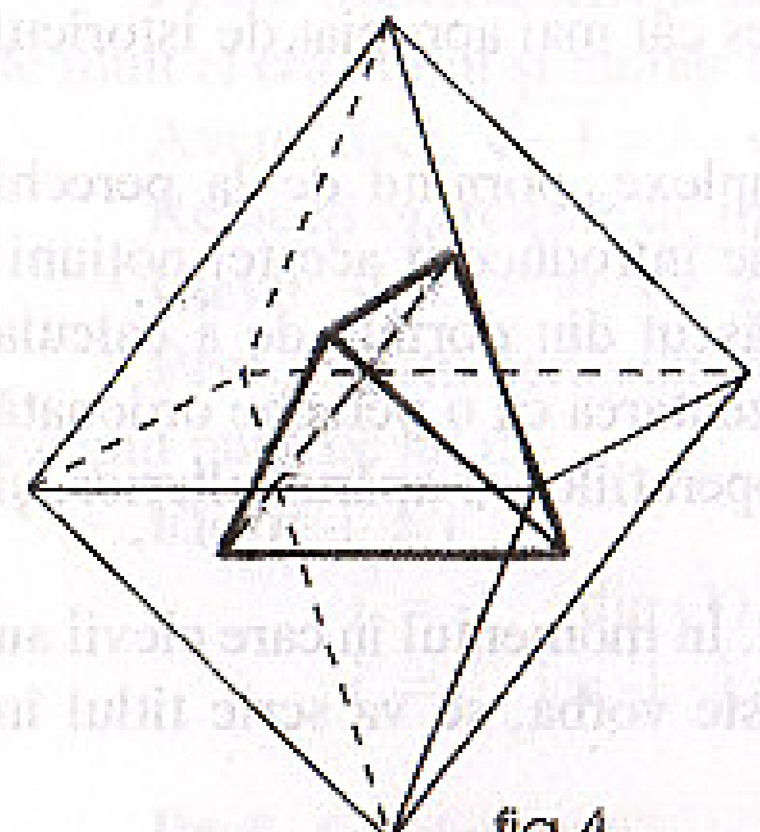


fig.4

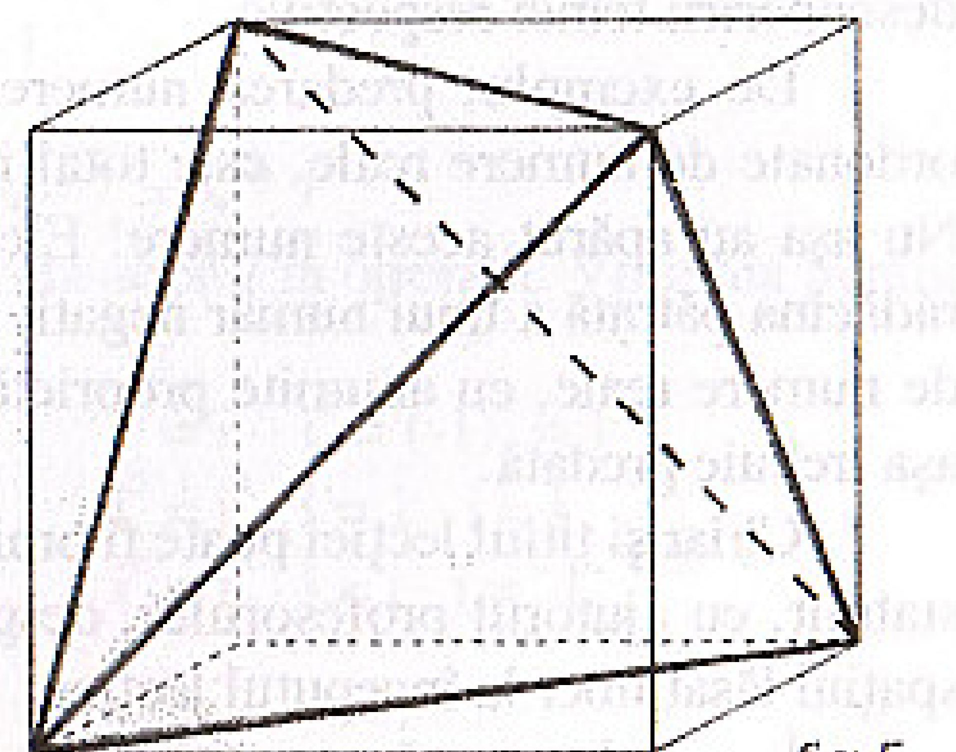


fig.5

APARIŢIA NUMERELOR COMPLEXE

Predarea noţiunii prin întrebări

Titus Grigorovici

"Să facem să treacă totul prin filtrul convingerii elevului, să nu-i băgăm nimic în cap pe baza autorităţii şi încrederii în spusele altuia".

MONTAIGNE

Prelegerea în matematică, adică predarea prin prezentarea de către profesor a unei teorii "afişate" direct pe tablă, asigură parcurgerea unei cantităţi mari de materie în timp optim. Însă materia este rareori înţeleasă de către elevi, în majoritatea cazurilor fiind necesar un ajutor ulterior pentru înţelegerea lecţiei. Iar dacă aceasta este prezentată şi într-un mod mai abstract (cum este deseori cazul) rezultatul este dezastruos.

Problematizarea, învăţarea prin descoperire şi folosirea conversaţiei vor salva elevii de la o oră plictisitoare, plină de o matematică de neînţeles. O variantă extremă a acestei forme de învăţare este predarea prin întrebări. Profesorul nu predă lecţia ci pune, pe parcursul întregii ore, doar întrebări. Acestea, dacă sunt bine alese, vor orienta elevii pe drumul dorit, dascălul având doar rolul de "regizor din umbră" al lecţiei. Elevii vor avea impresia că descoperă singuri materia, fapt ce va duce la rezultate deosebite în înţelegerea şi însuşirea ei. În general se foloseşte conversaţia frontală, elementele lecţiei fiind descoperite inductiv sau prin analogie. Întrebările trebuie astfel puse încât elevii să poată răspunde pe baza unor cunoştinţe anterioare sau a unui raţionament simplu. Paşii logici dintre două întrebări trebuie să fie accesibili clasei iar parcursul ales cât mai apropiat de istoricul descoperirii temei respective.

De exemplu, predarea numerelor complexe, pornind de la perechi ordonate de numere reale, este total improprie introducerii acestei noţiuni. Nu aşa au apărut aceste numere! Ele s-au născut din dorinţa de a calcula rădăcina pătrată a unui număr negativ. Reprezentarea ca o pereche ordonată de numere reale, cu anumite proprietăţi ale operaţiilor, a apărut ulterior, şi aşa trebuie predată.

Chiar şi titlul lecţiei poate fi omis iniţial. În momentul în care elevii au stabilit, cu ajutorul profesorului, despre ce este vorba, se va scrie titlul în spaţiul lăsat liber la începutul lecţiei.

În cazul unor răspunsuri greşite, profesorul nu trebuie să-l corecteze pe elev, ci să pună o nouă întrebare care să evidenţieze greşeala şi să ajute răspunsul corect.

Prezentăm în continuare, într-un dialog imaginar, introducerea numerelor complexe în clasa a IX-a.

Profesor: Din capitolul precedent cunoaştem că rădăcina de ordin par nu este definită pentru numere negative. În particular, nu există un număr real pentru $\sqrt{-9}$. Altfel spus, nu există un număr real a pentru care $a^2 = -9$. La fel ca la operaţia 3- 5, când am descoperit numerele negative, sau ca la 7:2 când am găsit numerele raţionale, şi aici vom încerca să rezolvăm dilema printr-o extindere a domeniului numerelor. Să studiem puţin această situaţie: încercaţi să calculaţi $\sqrt{-9}$!

Elevii: ...?

Prof.: Să încercăm să scoatem factorii de sub radical!

Elevii (cu ajutorul profesorului): $\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = 3\sqrt{-1}$.

Prof.: Încercaţi şi pentru $\sqrt{-25}$ şi $\sqrt{-7}$.

Elevii: $\sqrt{-25} = 5 \cdot \sqrt{-1}$ şi $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1}$.

Prof. (sau un elev): Dacă am putea stabili cât este $\sqrt{-1}$, am rezolva situaţia. Observăm că $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Nu există însă nici un număr real care înmulţit cu el însuşi să dea rezultatul -1. Suntem în faţa unei adevărate fantome numerice.

(În acest moment poate avea loc o discuţie lejeră şi plină de fantezie despre cum ar putea arăta un astfel de număr. De exemplu:)

Prof.: Ar putea fi un 1 cu jumătate de minus?!

Un elev: Poate $\bar{1}$?

Alt elev: sau ·1 ? *etc*.

Prof.: Matematicienii au optat pentru varianta "i" de la imaginar. Mai de mult el era numit şi număr imposibil.

Avem, deci, $\sqrt{-1} = i$ sau $i^2 = -1$. (1)

Refaceţi exerciţiile de mai sus!

Elevii: $\sqrt{-9} = 3i; \sqrt{-25} = 5i; \sqrt{-7} = \sqrt{7}\, i$.

Prof.: Să studiem cum se comportă acest i în operaţii. Vom lua pentru început puterile lui i:

Elevii: $i^1 = i$ $\qquad$ $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1$

$i^2 = -1$ din (1) $\qquad$ $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ $\qquad$ $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

....

Prof.: Ce observaţi?

Elevii: Se repetă grupul de rezultate i; -1; -i; 1.

Elevii (Cu ajutorul profesorului): pentru orice $k \in \mathbf{N}$ avem $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$ şi $i^{4k+3} = -i$.

Prof.: Dar 1^0 cât este?

Elevii: $i^0 = 1$, pentru k =0; la fel ca la numerele reale.

Prof.: Efectuaţi operaţiile: $2 \cdot 5i$; $-3 \cdot (-7i)$; $i \cdot 3i$; $-5i \cdot 6i$; $(4i)^2$; $(2i)^3$; $15i : 3$; $16i : i$; $20i : 5i$.

Răspunsurile elevilor: 10i; 21i; -3; +30; -16; -8i; 5i; 16; 4.

Prof.: Urmează adunările şi scăderile: 7i + 3i; 5i - 12i; -8i - 6i; 3 + 2i; 6i -1.

Răspunsurile elevilor: 10i; -7i; -14i; 3 + 2i şi 6i - 1 nu se pot efectua.

Un elev (sau profesorul): şi la $3 + 2\sqrt{5}$ lăsăm în această formă, deşi puteam calcula cu aproximaţie.

Prof.: (7 + 5i) + (2 - 3i)

Elevii: = 7 + 5i + 2 - 3i = 9 + 2i

Prof.: (-2 + 3i) + (7 - i) - (6 - 9i)

Elevii: -2 + 3i + 7 - i - 6 + 9i = 11i - 1

Prof.: Observăm că se conturează trei categorii de numere:

1. numerele reale (care nu au i);
2. numerele de forma ni cu $n \in \mathbf{R}$, numite imaginare;
3. numerele de forma a + bi cu $a, b \in \mathbf{R}$ compuse dintr-o parte reală şi una imaginară. Ele se numesc numere complexe. Mulţimea numerelor complexe se notează cu $\mathbf{C}$. Acum scriem şi titlul la începutul lecţiei: NUMERE COMPLEXE.

Prof.: Ce se întâmplă dacă b = 0?

Elevii: Obţinem un număr real.

Prof.: Înseamnă că $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ şi avem şirul de incluziuni

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

(După unele exerciţii de aprofundare)

Prof.: Am văzut cum se efectuează adunările şi scăderile. Să revenim la înmulţire: $(5 + 3i) \cdot (2 + 4i)$

Elevii: $= 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4i + 3i \cdot 2 + 3i \cdot 4i = 10 + 20i + 6i - 12 = -2 + 26i$

(După alte exemple se poate ajunge prin observaţii la formulele)

Elevii şi Prof.: (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i şi

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

*

Urmează tema, care va conţine multe operaţii de tipul studiat având rolul de a familiariza cât mai repede elevul cu numerele proaspăt cunoscute. Conjugatul şi împărţirea se studiază analog în ora următoare. La reprezentarea grafică se poate face legătura numerelor complexe cu perechea ordonată $(a; b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Tot aici se poate studia, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, modulul unui număr complex ca fiind distanţa de la originea axelor la imaginea sa (la fel ca la numere reale).

Observăm în final, că, spre deosebire de lecţia din manual, aici nu am avut nevoie de nici o definiţie, elevii construind "din nimic" toată teoria.

BIBLIOGRAFIE:

EGMONT COLERUS - DE LA TABLA ÎNMULŢIRII LA INTEGRALĂ: EDITURA ŞTIINŢIFICĂ, 1967

EUGEN RUSU - PROBLEMATIZARE ŞI PROBLEME ÎN MATEMATICA ŞCOLARĂ: EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, 1978

PROBLEMA SÂRMEI PE ECUATOR

Să presupunem că am reuşi să întindem o sârmă în jurul Pământului, de-a lungul Ecuatorului. La întâlnirea unor dealuri sau munţi am trece sârma prin şanţuri sau tunele astfel încât forma sa finală să fie perfect circulară. Dacă am adăuga acestui cerc încă 7m de sârmă, raza sa ar creşte. Această creştere ar fi suficientă ca să treacă pe sub sârmă un câine?

<u>Răspuns</u>: Notând cu r raza cercului iniţial şi cu R raza cercului după adăugarea celor 7 m de sârmă, obţinem că:

$$2\pi R - 2\pi r = 7 \Rightarrow 2\pi (R - r) = 7 \Rightarrow R - r = \frac{7}{2\pi} \approx \frac{7}{2 \cdot 3,14} = \frac{7}{6,28} > 1.$$

Deci raza cercului s-ar mări cu peste 1 m, suficient să treacă pe sub sârmă toţi câinii Pământului.

ADAPTARE DUPĂ: A. HOLLINGER - MATEMATICA VII, EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, 1970